Table des matières

1 Découvrir les nombres premiers **1**

2 Décomposer un entier en produits de facteurs premiers **2**

3 Utiliser le PGCD **3**

4 Rendre une fraction irréductible **4**

5 Faire des opérations avec les fractions **5**

6 Calculer avec les puissances **6**

7 Utiliser l'écriture scientifique **7**

8 Réduire une expression littérale **8**

9 Développer une expression
Distribuer un produit **9**

10 Factoriser une expression **10**

11 Résoudre une équation du premier degré **11**

12 Résoudre une équation produit nul **12**

13 Résoudre une équation de la forme $x^2 = a$ **13**

14 Utiliser l'identité remarquable pour développer ou factoriser **14**

15 Calculer des effectifs, des fréquences et une étendue en statistiques **15**

16 Calculer une moyenne simple et une moyenne pondérée **16**
1. Moyenne d'une série à valeurs individuelles 16
2. Moyenne d'une série à valeurs affectées d'un coefficient 16

17 Déterminer une médiane d'une série statistique **17**

18 Déterminer la probabilité d'un évènement et celle d'un évènement contraire **18**

19 Déterminer une probabilité d'une expérience à deux épreuves **19**

20 Reconnaître une situation de proportionnalité **20**
1. Par le calcul 20
2. Par un graphique 20

21 Exploiter une situation de proportionnalité **22**
1. Tableau et graphique 22
2. Grandeurs composées - la vitesse 22

22 Utiliser un pourcentage donné
Augmentation / réduction d'une quantité **23**
1. Utiliser un pourcentage donné . . . 23
2. Lien avec l'augmentation et la réduction . . . 23

23 Exprimer une proportion en pourcentage
Travailler avec les ratios **24**
1. Exprimer une proportion en pourcentage . . . 24
2. Travailler avec les ratios . . . 24

24 Utiliser le vocabulaire
Antécédent et image **25**

25 Construire la courbe représentative d'une fonction avec un tableau de valeurs **26**

26 Connaître et utiliser la fonction affine **27**

27 Connaître et utiliser la fonction linéaire **28**

28 Reconnaître des images par transformation géométrique **29**
1. La symétrie axiale . . . 29
2. La symétrie centrale . . . 29
3. La translation . . . 29
4. La rotation . . . 30

29 Les homothéties **31**
1. Homothétie de rapport positif . . . 31
2. Homothétie de rapport négatif . . . 31
3. Bilan . . . 31

30 Calculer une longueur, une aire ou un volume en s'aidant du rapport d'agrandissement ou de réduction **32**

31 Calculer un rapport d'agrandissement ou de réduction **33**

32 Calculer une longueur de segment avec le théorème de Pythagore **34**
1. Calculer la longueur de l'hypoténuse . . . 34
2. Calculer la longueur d'un côté autre que l'hypoténuse . . . 34

33 Calculer une longueur de segment avec le théorème de Thalès **35**

34 Calculer une longueur de segment avec la trigonométrie **36**

35 Calculer la mesure d'un angle avec la trigonométrie **38**

36 Montrer qu'un triangle est rectangle avec la réciproque du théorème de Pythagore **40**

37 Montrer du parallélisme avec la réciproque du théorème de Thalès **41**

38 Montrer que deux triangles sont semblables **43**

39 Utiliser des triangles semblables pour calculer des longueurs **44**

40 Calculer un périmètre ou une aire
Tableaux de conversion **45**
1. Périmètres de figures usuelles et tableau de conversion . . . 45
2. Aires de figures usuelles et tableau de conversion . . . 45

41 Calculer un volume
Tableau de conversion **46**

42 Repérage sur une sphère **47**

43 Utiliser les formules d'un tableur **48**

Fiche 1

Découvrir les nombres premiers

Cribble d'Eratosthène

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Définition — Un **nombre premier** est un nombre entier positif qui admet exactement deux diviseurs positifs distincts.

Propriété — Il existe une infinité de nombres premiers.

La liste des nombres premiers que je dois connaître :

FICHE 2

DÉCOMPOSER UN ENTIER EN PRODUITS DE FACTEURS PREMIERS

PROPRIÉTÉ — Tout nombre entier positif supérieur ou égal à 2 peut admet une unique décomposition en produits de facteurs premiers. **L'ordre des facteurs peut varier.**.

MÉTHODE — Pour être méthodique, on va chercher à diviser autant de fois que possible par 2, puis par 3, par 5, par 7, par 11, ... en suivant la liste des nombres premiers successifs.

EXEMPLES :

$$150 = 2 \times 75$$
$$150 = 2 \times 3 \times 25$$
$$150 = 2 \times 3 \times 5 \times 5$$

Les diviseurs de 150 sont 1 ; 2 ; 3 ; 5 ; 6 ; 10 ; 15 ; 25 ; 30 ; 50 ; 75 et 150.

$$999 = 3 \times 333$$
$$999 = 3 \times 3 \times 111$$
$$999 = 3 \times 3 \times 3 \times 37$$

Les diviseurs de 999 sont 1 ; 3 ; 9 ; 27 ; 37 ; 111 ; 333 et 999.

EXERCICE À COMPLÉTER : Donne la décomposition en produits de facteurs premiers des nombres suivants avec sa liste des diviseurs.

$$24 =$$
$$24 =$$
$$24 =$$

Les diviseurs de 24 sont ....

$$126 =$$
$$126 =$$
$$126 =$$

Les diviseurs de 126 sont ....

$$120 =$$
$$120 =$$
$$120 =$$
$$120 =$$

Les diviseurs de 120 sont ....

FICHE 3

UTILISER LE PGCD

DÉFINITION — Soit a et b deux nombres entiers non nuls. On appelle **PGCD de a et b** le plus grand commun diviseur de a et b.

MÉTHODE — Déterminons le PGCD de 675 et 375.
Pour ce faire, donnons la décomposition en produits de facteurs premiers de 675 et 375.

- $675 = 3 \times 3 \times 3 \times 5 \times 5$
- $375 = 3 \times 5 \times 5 \times 5$

On observe que le plus grand diviseur commun est $3 \times 5 \times 5 = 75$ car $675 = 75 \times 9$ et $375 = 75 \times 5$

Si l'on possède 675 roses et 375 tulipes et que l'on souhaite faire le maximum de bouquets identiques sans perdre de fleurs alors on pourra réaliser 75 bouquets **au maximum** comportant chacun 9 roses et 5 tulipes.

EXERCICE À COMPLÉTER : Donne le PGCD de 30 et 54 puis de 195 et 234.

$30 =$ $30 =$	$54 =$ $54 =$ $54 =$

Le PGCD de 30 et 54 est --

Si l'on possède 30 roses et 54 tulipes et que l'on souhaite faire le maximum de bouquets identiques sans perdre de fleurs alors on pourra réaliser ------------ bouquets **au maximum** comportant chacun ------------ roses et ------------ tulipes.

$195 =$ $195 =$	$234 =$ $234 =$ $234 =$

Le PGCD de 195 et 234 est --

Si l'on possède 195 roses et 234 tulipes et que l'on souhaite faire le maximum de bouquets identiques sans perdre de fleurs alors on pourra réaliser ------------ bouquets **au maximum** comportant chacun ------------ roses et ------------ tulipes.

Fiche 4

Rendre une fraction irréductible

Définition — On dit qu'une fraction est **irréductible** lorsque son numérateur est son dénominateur n'ont pas de diviseur commun autre que 1.

Exemples :

- $\dfrac{2}{15}$ est une fraction irréductible car 2 et 15 n'ont que 1 comme diviseur commun.
- $\dfrac{9}{27}$ n'est pas une fraction irréductible car 9 et 27 n'ont pas que 1 comme diviseur commun. Ils sont également divisibles par 3 et 9.

Méthode — Rendons la fraction $\dfrac{252}{360}$ irréductible.

Pour se faire, donnons la décomposition en produits de facteurs premiers de 252 et 360.

- $252 = 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 7$
- $180 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5$

$$\frac{252}{360} = \frac{2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 7}{2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5} = \frac{7}{10}$$

Rendons la fraction $\dfrac{45}{315}$ irréductible.

Pour se faire, donnons la décomposition en produits de facteurs premiers de 45 et 315.

- $45 = 3 \times 3 \times 5$
- $315 = 3 \times 3 \times 5 \times 7$

$$\frac{45}{315} = \frac{3 \times 3 \times 5}{3 \times 3 \times 5 \times 7} = \frac{1}{7}$$

Fiche 5

Faire des opérations avec les fractions

Règles :

- Pour additionner ou soustraire des fractions, celles-ci doivent avoir le même dénominateur.
- Pour multiplier des fractions entre elles, on doit multiplier les numérateurs et les dénominateurs entre eux (multiplication en ligne).
- Diviser par une fraction revient à multiplier par son inverse.

Exemples :

$$A = \frac{7}{9} + \frac{5}{6}$$

$$A = \frac{7_{\times 2}}{9_{\times 2}} + \frac{5_{\times 3}}{6_{\times 3}}$$

$$A = \frac{14}{18} + \frac{15}{18}$$

$$A = \frac{29}{18}$$

$$B = \frac{-7}{5} \times \frac{8}{9}$$

$$B = \frac{-7 \times 8}{5 \times 9}$$

$$B = -\frac{56}{45}$$

$$C = \frac{8}{-9} \div \frac{7}{3}$$

$$C = \frac{8}{-9} \times \frac{3}{7}$$

$$C = \frac{8 \times 3}{-9 \times 7}$$

$$C = -\frac{24}{63}$$

Exercice à compléter : Calcule correctement

$$A = \frac{-3}{4} - \frac{5}{6} + 2$$

$A =$ ------------------

$A =$ ------------------

$A =$ ------------------

$$B = \frac{25}{-4} \times \frac{-3}{35}$$

$B =$ ------------------

$B =$ ------------------

$B =$ ------------------

$$C = \frac{14}{15} \div 7$$

$C =$ ------------------

$C =$ ------------------

$C =$ ------------------

$$D = \frac{8}{7} - \frac{4}{7} \times \frac{-5}{3}$$

$D =$ ------------------

$D =$ ------------------

$D =$ ------------------

$D =$ ------------------

$D =$ ------------------

$$E = \frac{-3}{2 + \frac{5}{2}}$$

$E =$ ------------------

$E =$ ------------------

$E =$ ------------------

$E =$ ------------------

$E =$ ------------------

$$F = (-\frac{2}{3} + \frac{4}{9}) \div \frac{16}{7}$$

$F =$ ------------------

$F =$ ------------------

$F =$ ------------------

$F =$ ------------------

$F =$ ------------------

FICHE 6

CALCULER AVEC LES PUISSANCES

DÉFINITION — Soit a un nombre et n un entier relatif non nul.

$$a^n = \underbrace{a \times a \times a \times \ldots \times a}_{n \text{ facteurs } a}$$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} = \frac{1}{\underbrace{a \times a \times a \times \ldots \times a}_{n \text{ facteurs } a}}$$

EXEMPLES :

$2^5 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$

$-2^3 = -2 \times 2 \times 2$

$4^{-3} = \frac{1}{4 \times 4 \times 4}$

$(-2)^3 = (-2) \times (-2) \times (-2)$

Remarque

Soit a un nombre non nul et n un entier non nul.

- $a^1 = a$

  Par exemple, $18^1 = 18$

- $a^0 = 1$

  Par exemple, $121^1 = 121$

- $0^n = 0$

  Par exemple, $0^{3024} = 0$

- $1^n = 1$

  $1^{2045} = 1$

EXERCICE À COMPLÉTER : Simplifie les écritures suivantes en les écrivant avec une unique puissance.

$A = 6 \times 6 \times 6 \times 6 \times 6$

$A =$ ....

$B = 3 \times 9 \times 27 \times 1^2$

$B =$ ....

$B =$ ....

$B =$ ....

$C = 4 \times 2^2 \times 4^3 \times 2^4 \times 2^0$

$C =$ ....

$C =$ ....

EXERCICE À COMPLÉTER : Donne l'écriture des nombres suivants sous la forme d'un nombre entier ou d'une fraction.

$D = 10^4$

$D =$ ....

$E = 10^{-3}$

$E =$ ....

$F = 6^{-2}$

$F =$ ....

$G = 3^4$

$G =$ ....

$H = 5^{-2} \times 5^{-3}$

$H =$ ....

$H =$ ....

$I = \frac{7^3 \times 7^6}{7^2}$

$I =$ ....

$I =$ ....

Fiche 7

Utiliser l'écriture scientifique

Définition — Soit a un nombre compris entre 1 et 10 exclu et n un nombre entier.L'écriture scientifique d'un nombre est l'écriture de la forme :

$$a \times 10^n$$

Exemples : $79\ 523 = 7{,}9523 \times 10^4$ $\qquad$ $0{,}000\ 052\ 6 = 5{,}26 \times 10^{-5}$

Exercice à compléter : Ecris les nombres suivants sous leur notation scientifique

$A = 91\ 000\ 000$ $\qquad$ $B = 0{,}000\ 16$

$A =$ ---------------------- $\qquad$ $B =$ ----------------------

$D = 276{,}1 \times 10^3$ $\qquad$ $E = 654 \times 10^{-4}$

$D =$ ---------------------- $\qquad$ $E =$ ----------------------

Préfixe	Symbole	Facteur multiplicatif	Puissance associée
Giga	G	1 000 000 000	10^9
Méga	M	1 000 000	10^6
kilo	k	1 000	10^3
hecto	h	100	10^2
déca	dac	10	10^1
		1	10^0
déci	d	0,1	10^{-1}
centi	c	0,01	10^{-2}
milli	m	0,001	10^{-3}
micro	μ	0,000 001	10^{-6}
nano	n	0,000 000 001	10^{-9}

Exemples :

- Le diamètre du virus de la varicelle mesure 175×10^{-9} m soit 175 nm (nanomètres).
- Un grain de sable mesure 0,000 232 m soit 232 μm (micromètres) .
- La capacité de stockage d'un ordinateur est donnée en octet noté o. Un ordinateur a une capacité de stockage de 500×10^9 octets soit 500 Go (Gigaoctets).

Fiche 8

Réduire une expression littérale

Définition — Réduire une expression signifie l'écrire sous la forme la plus simple possible en **regroupant les termes** possédant les **mêmes lettres** affectées des **mêmes exposants**.

Méthode — Pour réduire une expression littérale, on commence par identifier chaque terme ayant les mêmes lettres affectées des mêmes exposants puis on les additionne entres eux.

Exemples :

$A = 18x + 4x$	$B = 3a + 12 - 2a + 5 - a + 9a - 9$	$C = 2x^2 + 6x - 5 - 11x + 12 - 5x^2 + x$
$A = 18x + 4x$	$B = 3a + 12 - 2a + 5 - a + 9a - 9$	$C = 2x^2 + 6x - 5 - 11x + 12 - 5x^2 + x$
$A = 22x$	$B = 9a + 8$	$C = -3x^2 - 4x + 7$

Exercice à compléter : Réduis chaque expression

$A = 7x + 3 + 2x - 9$	$B = -5x - 2 + 8x - 3$	$C = 2x^2 - 8x - 16 - 5x^2 - 10x + 13$
$A =$	$B =$	$C =$ ....
$A =$	$B =$	$C =$ ....
$D = 4a \times 2a - 5a - a + 8a - 3a \times 5a$	$E = 2x - (7x - 9x)$	$F = 2x \times 7 + 8y \times 4 - 3x$
$D =$	$E =$	$F =$ ....
$D =$	$E =$	$F =$ ....

FICHE 9

DÉVELOPPER UNE EXPRESSION
DISTRIBUER UN PRODUIT

DÉFINITION — Développer une expression, c'est transformer un produit en une somme ou une différence.

PROPRIÉTÉ — DISTRIBUTIVITÉ SIMPLE : Soit a, c et d trois nombres :

$$a(c+d) = a\times c + a\times d$$

$$a(c-d) = a\times c + a\times(-d)$$

MÉTHODE — Pour développer une expression littérale, on doit distribuer le facteur à chaque terme de la parenthèse. On pourra s'aider de flèches ou d'un tableau.

EXEMPLE :

$$A = -2(3x-7)$$

$A = -2(3x-7)$

$A = -2\times 3x - 2\times(-7)$

$A = -6x + 14$

$\times$	$3x$	-7
-2	$-6x$	$+14$

$A = -6x + 14$

PROPRIÉTÉ — DISTRIBUTIVITÉ DOUBLE : Soit a, b, c et d quatre nombres :

$$(a+b)(c+d) = a\times c + a\times d + b\times c + b\times d$$

$$(a+b)(c-d) = a\times c + a\times(-d) + b\times c + b\times(-d)$$

MÉTHODE — La même méthode s'applique pour la double distributivité.

EXEMPLE :

$$A = (-5x+3)(2x-4)$$

$A = (-5x+3)(2x-4)$

$A = -5x\times 2x - 5x\times(-4) + 3\times 2x + 3\times(-4)$

$A = -10x^2 + 20x + 6x + (-12)$

$A = -10x^2 + 26x + (-12)$

$\times$	$2x$	-4
$-5x$	$-10x^2$	$+20x$
$+3$	$+6x$	-12

$A = -10x^2 + 20x + 6x + (-12)$
$A = -10x^2 + 26x + (-12)$

Fiche 10

Factoriser une expression

Définition — Factoriser une expression, c'est transformer une somme ou une différence en un produit.

Propriété — Soit a, c et d trois nombres.

$$\underbrace{a \times c + a \times d}_{\text{Forme développée}} = \underbrace{a(c+d)}_{\text{Forme factorisée}}$$

Méthode — Pour factoriser une expression, il faut :

1) Idenfitier un facteur commun (idéalement le plus grand) ;

2) Factoriser ;

3) Réduire l'expression si possible.

Exemples :

$A = 4 \times 6 + 4 \times 2x$

$A = 4 \times 6 + 4 \times 2x$

$A = 4 \times (6 + 2x)$

$B = \underbrace{42x}_{7\times 6x} - \underbrace{28}_{7\times 4}$

$B = 7 \times 6x - 7 \times 4$

$B = 7 \times (6xy - 4)$

$C = \underbrace{15y^2}_{3\times 5\times y\times y} - \underbrace{6y}_{2\times 3\times y}$

$C = 3 \times 5 \times y \times y - 2 \times 3 \times y$

$C = 3y \times (5y - 2)$

Exercice à compléter : Factorise chaque expression

$A = 10x + 5$

$A =$ ....

$A =$ ....

$B = 7x^2 + 8x$

$B =$ ....

$B =$ ....

$C = 14x^2 + 14x$

$C =$ ....

$C =$ ....

$D = 9x^2 + 6x$

$D =$ ....

$D =$ ....

$E = -49x^2 + 14x$

$E =$ ....

$E =$ ....

$F = (2x+1)(7x+8) + (2x+1)(3x+13)$

$F =$ ....

$F =$ ....

FICHE 11

RÉSOUDRE UNE ÉQUATION DU PREMIER DEGRÉ

DÉFINITION — Résoudre une équation signifie trouver la ou les valeur(s) de l'inconnue couramment appelé x.

MÉTHODE — Pour résoudre une équation, il faut isoler x tel que l'on ait $x = ...$. Pour cela on peut :

- ajouter un même terme de part et d'autre de l'égalité ;
- soustraire un même terme de part et d'autre de l'égalité ;
- multiplier par un même nombre de part et d'autre de l'égalité ;
- diviser par un même nombre de part et d'autre de l'égalité.

EXEMPLES : Voici plusieurs exemples de résolution d'équation du premier degré de difficulté croissante :

$$\begin{aligned} x-7&=-15 \\ x&=-8 \end{aligned} \quad (+7)$$

$$\begin{aligned} 4x-2&=1 \\ 4x-2+2&=1+2 \\ 4x&=3 \\ \frac{4}{4}x&=\frac{3}{4} \\ x&=\frac{3}{4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2x+2&=7x+3 && (-2x)\\ 2x-2x+2&=7x-2x+3 \\ 2&=5x+3 && (-3)\\ 2-3&=5x+3-3 \\ -1&=5x && (\div 5)\\ \frac{-1}{5}&=\frac{5}{5}x \\ \frac{-1}{5}&=x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -5x-3&=-2x+7 && (+5x)\\ -5x+5x-3&=-2x+5x+7 \\ -3&=3x+7 && (-7)\\ -3-7&=3x+7-7 \\ -10&=3x && (\div 3)\\ \frac{-10}{3}&=\frac{3}{3}x \\ \frac{-10}{3}&=x \end{aligned}$$

EXERCICE À COMPLÉTER : Résous chaque équation.

$6x = 2$	$2x+7=6$	$3x=-2x+12$
-------------------------------	-------------------------------	-------------------------------
-------------------------------	-------------------------------	-------------------------------

$-2x+5=-4x-6$	$2\times(4x-1)=6x$	$6(x-3)+4(x-1)=0$
-------------------------------	-------------------------------	-------------------------------
-------------------------------	-------------------------------	-------------------------------
-------------------------------	-------------------------------	-------------------------------

Fiche 12

Résoudre une équation produit nul

Définition — Une équation produit nul est une équation dont le premier membre est un produit (une multiplication) et l'autre membre est zéro.

Exemple : $(x+7)(3x-8)=0$ est une équation produit nul.

Propriété — Un produit est nul si et seulement si l'un des facteurs est nul.

Méthode — Considérons l'équation suivante :

$$(x+7)(3x-8)=0$$

C'est un produit nul donc :

$x+7=0$	ou	$3x-8=0$
$x=-7$		$3x=8$
		$x=\dfrac{8}{3}$

L'équation $(x+7)(3x-8)=0$ a deux solutions : $x=-7$ et $x=\dfrac{8}{3}$.

Exercice à compléter : Résous chaque équation.

$(4x-1)(9x-2)=0$	$(3x+4)(5x-10)=0$	$(5-2x)(5+3x)=0$
-------------------------------	-------------------------------	-------------------------------
-------------------------------	-------------------------------	-------------------------------
-------------------------------	-------------------------------	-------------------------------

$x(2x+7)=0$	$(3x-12)^2=0$	$4x(2x-3)=0$
-------------------------------	-------------------------------	-------------------------------
-------------------------------	-------------------------------	-------------------------------
-------------------------------	-------------------------------	-------------------------------

FICHE 13

RÉSOUDRE UNE ÉQUATION DE LA FORME $x^2 = a$

PROPRIÉTÉ — Soit l'équation $x^2 = a$ avec a un nombre. Les solutions de cette équation sont :

- si $a > 0$ alors les solutions sont $x = \sqrt{a}$ et $x = -\sqrt{a}$;
- si $a = 0$ alors la solution est $x = 0$;
- si $a < 0$ alors l'équation n'a pas de solution.

EXEMPLES :

$$x^2 = 25$$

Comme 25 est positif, alors l'équation $x^2 = 25$ a deux solutions :

$x = \sqrt{25}$ et $x = -\sqrt{25}$

$x = 5$ et $x = -5$

$$8x^2 = 40$$
$$x^2 = \frac{40}{8}$$
$$x^2 = 5$$

Comme 5 est positif, alors l'équation $x^2 = 5$ a deux solutions :

$x = \sqrt{5}$ et $x = -\sqrt{5}$

$$x^2 = -9$$

Comme -9 est négatif, alors l'équation $x^2 = -9$ n'a aucune solution.

$$x^2 = 0$$

L'équation $x^2 = 0$ a une unique solution : $x = 0$.

EXERCICE À COMPLÉTER : Résous chaque équation.

$x^2 = 16$	$x^2 = 7$	$3x^2 = 27$
------------------------------	------------------------------	------------------------------
------------------------------	------------------------------	------------------------------
------------------------------	------------------------------	------------------------------

$2x^2 - 4 = 45$	$(x+1)^2 = 36$	$(5x+4)^2 = 9$
------------------------------	------------------------------	------------------------------
------------------------------	------------------------------	------------------------------
------------------------------	------------------------------	------------------------------

Fiche 14

Utiliser l'identité remarquable pour développer ou factoriser

Propriété — Soit a et b deux nombres.

$$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$$

Démonstration. Pour montrer cela, il suffit de développer et réduire l'expression $(a+b)(a-b)$.

$$\begin{aligned}(a+b)(a-b) &= a\times a + a\times(-b) + b\times a + b\times(-b)\\ &= a^2 \cancel{-ab} + \cancel{ba} + (-b^2)\\ &= a^2 - b^2\end{aligned}$$

■

Méthode — Pour développer ou factoriser avec l'identité remarquable, il faut reconnaître a et b dans l'expression puis ensuite appliquer l'identité remarquable.

Exemples : L'expression A va être développée et les expressions B et C vont être factorisées en utilisant l'identité remarquable.

$$\begin{aligned}(6x-4)(6x+4) &= (6x-4)(6x+4)\\ &= (6x)^2 - 4^2\\ &= 36x^2 - 16\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x^2 - 81 &= x^2 - 81\\ &= x^2 - 9^2\\ &= (x+9)(x-9)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}100x^2 - 121 &= 100x^2 - 121\\ &= (10x)^2 - 11^2\\ &= (10x+11)(10x-11)\end{aligned}$$

Exercice à compléter : **Développe** chaque expression avec l'identité remarquable.

$A = (x+5)(x-5)$ $B = (3x-1)(3x+1)$ $C = (6x+7)(6x-7)$

$A =$ ________________ $B =$ ________________ $C =$ ________________

$A =$ ________________ $B =$ ________________ $C =$ ________________

Exercice à compléter : **Factorise** chaque expression avec l'identité remarquable.

$A = x^2 - 64$ $B = 4x^2 - 9$ $C = 1 - 81x^2$

$A =$ ________________ $B =$ ________________ $C =$ ________________

$A =$ ________________ $B =$ ________________ $C =$ ________________

$D = (x+1)^2 - 2^2$ $E = (2x+1)^2 - 25$ $F = 36 - (4-3x)^2$

$D =$ ________________ $E =$ ________________ $F =$ ________________

$D =$ ________________ $E =$ ________________ $F =$ ________________

Fiche 15

Calculer des effectifs, des fréquences et une étendue en statistiques

Définition — La **population** est l'ensemble des personnes ou objets étudiées. Cette population a une taille que l'on appelle **effectif total**. Le **caractère** est le critère étudié au sein de la population

---

Exemple : On a pesé 12 téléphones portables et obtenu les masses suivantes en gramme :

95 / 105 / 100 / 90 / 95 / 105 / 95 / 105 / 100 / 95 / 100 / 100

Ces données, c'est-à-dire les douze masses, constituent une **série statistique**.
La **population** est l'ensemble des téléphones portables.
Le **caractère étudié** est la masse des téléphones portables.
Les **valeurs du caractère** sont les quatre masses obtenus : 90 / 95 / 100 / 105.
L'**effectif total** est le nombre total de masses relevées : 12.

On peut résumer cette série avec un tableau.

Valeurs	90	95	100	105
Effectif	1	4	4	3

Définition — La fréquence d'une valeur est le quotient de son effectif par l'effectif total. Elle peut être exprimée sous forme fractionnaire, décimale ou en pourcentage.

Exemple : La fréquence de la valeur 95 est $\frac{4}{12} \approx 0.33 \approx 33\%$.

On a donc

Valeurs	90	95	100	105	**Total**
Effectif	1	4	4	3	12
Fréquence exacte sous forme fractionnaire	$\frac{1}{12}$	$\frac{4}{12}$	$\frac{4}{12}$	$\frac{3}{12}$	$\frac{12}{12} = 1$
Fréquence approximative ou exacte sous forme décimale	0.09	0.33	0.33	0.25	1
Fréquence approximative ou exacte en pourcentage	9	33	33	25	100

Définition — L'étendue est la différence entre la valeur la plus haute et la valeur la plus basse.

Exemple : Dans notre cas, l'étendue est : $105 - 90 = 15$.

Fiche 16

Calculer une moyenne simple et une moyenne pondérée

1. Moyenne d'une série à valeurs individuelles

Méthode — Soit la série statistique suivante qui est la liste des notes d'un élève lors d'un trimestre de sa scolarité :

9,5 / 17,5 / 13,5 / 9 / 13,5 / 13,5

Pour calculer la moyenne d'une série statistique à valeurs individuelles, on peut faire la somme de toutes les valeurs et on divise par le nombre de valeurs (effectif total). Ici, on a donc :

La somme des données de la série est :

$$9+9{,}5+13{,}5+13{,}5+13{,}5+17{,}5=76{,}5.$$

L'effectif total de la série est :

$$1+1+1+1+1+1=6.$$

Donc la moyenne de la série est égale à :

$$\frac{76{,}5}{6}=12{,}75.$$

Interprétation : Si l'élève avait obtenu la même note à chaque contrôle, il aurait eu 12,75.

2. Moyenne d'une série à valeurs affectées d'un coefficient

Le professeur décide d'affecter un coefficient aux différentes notes obtenues au trimestre suivant par l'élève. Pour l'exemple, avoir 17,5 coefficient 2 correspond à deux notes de 17,5. On a alors une nouvelle série statistique que l'on peut expliciter dans le tableau suivant :

Valeurs	7	8	9,5	13,5	17	17,5
Effectif	3	3	4	4	5	2

Méthode — Pour calculer cette moyenne, on commence par calculer le produit de chaque valeur par son effectif. On calcule ensuite la somme de tous ces produits puis on divise par la somme des effectifs. Ici, on a donc :

La somme des données de la série est :

$$3\times 7+3\times 8+4\times 9{,}5+4\times 13{,}5+6\times 17+2\times 17{,}5=274.$$

L'effectif total de la série est :

$$3+3+4+4+6+2=22.$$

Donc la moyenne de la série est égale à :

$$\frac{274}{22}\approx 12{,}45.$$

Interprétation : Si l'élève avait obtenu la même note à chaque contrôle, il aurait eu 12,45.

Fiche 17

Déterminer une médiane d'une série statistique

Définition — On appelle médiane d'une série un nombre tel que :

- au moins la moitié des valeurs de la série soient inférieures ou égales à ce nombre ;
- au moins la moitié des valeurs de la série soient supérieures ou égales à ce nombre.

Méthode — On distingue trois cas de figures.

Première situation : l'effectif total est pair

On range les données par ordre croissant :

$$4\,;\,6\,;\,7\,;\,12\,;\,15\,;\,18\,;\,19\,;\,20.$$

L'effectif total de la série est 8. Or, $8 = 4 + 4$.
La 4^e donnée est 12. La 5^e donnée est 15.
Donc une médiane peut être tout nombre compris entre 12 et 15 inclus.

Interprétation : Pour l'exemple, prenons une médiane égale à 14.
Au moins la moitié des valeurs sont inférieures ou égales à 14.
Au moins la moitié des valeurs sont supérieures ou égales à 14.

Deuxième situation : l'effectif total est impair

On range les données par ordre croissant :

8; 8; 9; 10; 11; 12; 12; 15; 16.

L'effectif total de la série est 9. Or, $9 = 4 + 1 + 4$.
La médiane de la série est la 5ᵉ donnée.
Donc la médiane de la série est 11.

Interprétation :
Au moins la moitié des valeurs sont inférieures ou égales à 11.
Au moins la moitié des valeurs sont supérieures ou égales à 11.

Troisième situation : l'effectif total est important

On considère la série statistique suivante où l'effectif total est 39.

Valeurs	30	40	50	55	60	70	80
Effectif	5	6	8	7	2	5	6
E.C.C.	5	11	19	26	28	33	39

L'E.C.C. signifie "effectif cumulé croissant".

L'effectif total de la série est 39. Or, $39 = 19 + 1 + 19$. La médiane de la série est la 20ᵉ donnée. Donc la médiane de la série est 55.

Interprétation :
Au moins la moitié des valeurs sont inférieures ou égales à 55.
Au moins la moitié des valeurs sont supérieures ou égales à 55.

FICHE 18

DÉTERMINER LA PROBABILITÉ D'UN ÉVÈNEMENT ET CELLE D'UN ÉVÈNEMENT CONTRAIRE

DÉFINITION — Une **expérience** est dite **aléatoire** lorsque l'on ne peut prévoir le résultat qui se produira.
Une expérience comporte plusieurs **issues** ou résultats.
Un **évènement** est constitué d'une ou plusieurs issues d'une même expérience aléatoire.

EXEMPLE : On s'intéresse à l'expérience aléatoire d'un lancer de dé équilibré à six faces.
Les issues de cette expérience sont 1, 2, 3, 4, 5 et 6.
On appelle l'évènement A "Obtenir un chiffre strictement inférieur à 3" qui comporte les issues 1 et 2.
On appelle l'évènement B "Obtenir un chiffre pair" qui comporte les issues 2, 4 et 6.

DÉFINITION — L'**évènement contraire** de A, noté $\overline{A}$ est l'ensemble de toutes les issues n'appartenant pas à A.

EXEMPLE : L'évènement $\overline{A}$ est l'évènement "Ne pas obtenir un chiffre inférieur à 3". Les issues sont 3, 4, 5 et 6.
L'évènement $\overline{B}$ est l'évènement "Ne pas obtenir un chiffre pair". Les issues sont 1, 3 et 5.

DÉFINITION — La **probabilité** d'un évènement est un nombre compris entre 0 et 1 qui exprime "la chance qu'a un évènement de se produire".
On parle d'**équiprobabilité** lorsque chaque issue a la même probabilité de se produire qu'une autre.

PROPRIÉTÉ — Lorsqu'il y a équiprobabilité, la probabilité d'un évènement A est :

$$p(A) = \frac{\text{Nombre d'issues favorables à A}}{\text{Nombre d'issues total}}$$

PROPRIÉTÉ — Dans le cas de l'évènement contraire $\overline{A}$, on a :

$$p(\overline{A}) = 1 - p(A)$$

EXEMPLE : La probabilité de l'évènement A est $p(A) = \frac{2}{6}$.

La probabilité de l'évènement B est $p(B) = \frac{3}{6}$.

La probabilité de l'évènement $\overline{A}$ est $p(\overline{A}) = 1 - \frac{2}{6} = \frac{6}{6} - \frac{2}{6} = \frac{4}{6}$.

La probabilité de l'évènement $\overline{B}$ est $p(\overline{B}) = 1 - \frac{3}{6} = \frac{6}{6} - \frac{3}{6} = \frac{3}{6}$.

FICHE 19

DÉTERMINER UNE PROBABILITÉ D'UNE EXPÉRIENCE À DEUX ÉPREUVES

DÉFINITION — On appelle **expérience aléatoire à deux épreuves** une expérience composée de deux expériences faites successivement (l'une après l'autre).

MÉTHODE — Pour déterminer la probabilité d'une expérience aléatoire à deux épreuves, on doit :

1) réaliser un tableau à double entrée ;

2) dénombrer (compter) le nombre d'issues favorables de l'évènement recherché ;

3) dénombrer le nombre total d'issues ;

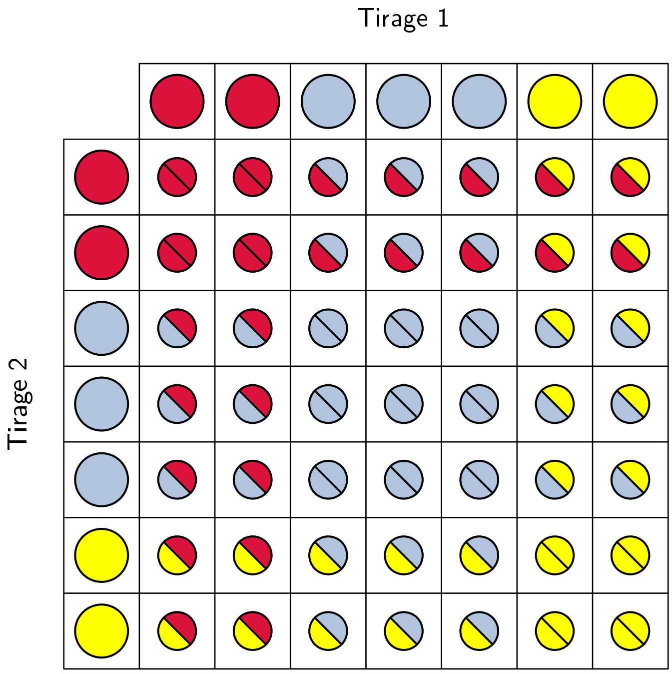
4) calculer le quotient du premier dénombrement par le deuxième.

EXEMPLE : Une urne contient deux boules rouges, trois boules bleues et deux boules jaunes. On tire deux fois de suite une boule de l'urne en la remettant dans l'urne après chaque tirage. On appelle cela un tirage avec remise.

On s'intéresse à :

1) l'évènement A "Obtenir deux boules rouges" ;

2) l'évènement B "Obtenir au moins une boule rouge".



1) On compte 4 issues favorables à l'évènement A sur les 49 issues possibles.
Donc $p(A) = \dfrac{4}{49}$

2) On compte 24 issues favorables à l'évènement B sur les 49 issues possibles.
Donc $p(B) = \dfrac{24}{49}$

FICHE 20

RECONNAÎTRE UNE SITUATION DE PROPORTIONNALITÉ

DÉFINITION — Deux grandeurs sont proportionnelles lorsqu'il existe **un coefficient de proportionnalité** pour passer des valeurs de l'une aux valeurs de l'autre.

1. Par le calcul

On imagine deux grandeurs dont les valeurs sont résumées dans ce tableau.

Grandeur A	1	2	3	5	10	11	13
Grandeur B	2,5	5	7,5	12,5	25	27,5	32,5

MÉTHODE — Avec un coefficient de proportionnalité : on divise les valeurs de la première ligne par les valeurs de la deuxième ou inversement. Si l'on obtient le même nombre **sans arrondi** alors les deux grandeurs sont proportionnelles.

$2.5 \div 1 = 2.5$	$5 \div 2 = 2.5$	$7.5 \div 3 = 2.5$
$12.5 \div 5 = 2.5$	$25 \div 10 = 2.5$	$27.5 \div 11 = 2.5$
$32.5 \div 13 = 2.5$		

Tous les nombres de la deuxième ligne s'obtiennent en multipliant les nombres de la première ligne par 2,5.

Donc les deux grandeurs sont proportionnelles.

MÉTHODE — Avec l'égalité des produits en croix : si les produits en croix de toutes les colonnes sont les mêmes alors les deux grandeurs sont proportionnelles.

$$1 \times 5 = 5 \text{ et } 2,5 \times 2 = 5$$
$$1 \times 7,5 = 7,5 \text{ et } 2,5 \times 3 = 7,5$$
$$1 \times 12,5 = 12,5 \text{ et } 2,5 \times 5 = 12,5$$
$$1 \times 25 = 25 \text{ et } 2,5 \times 10 = 25$$
$$1 \times 27,5 = 27,5 \text{ et } 2,5 \times 11 = 27,5$$
$$1 \times 32,5 = 32,5 \text{ et } 2,5 \times 13 = 32,5$$

Les produits en croix sont bien égaux donc les deux grandeurs sont bien proportionnelles.

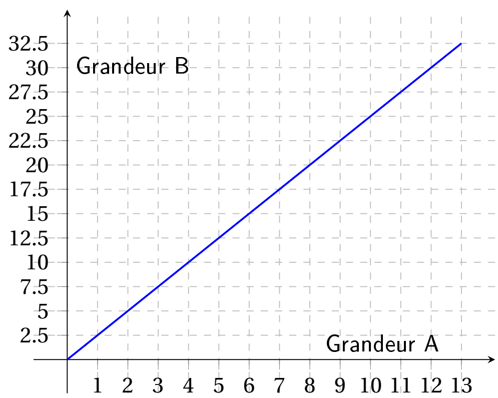
2. Par un graphique

PROPRIÉTÉ — Si la représentation graphique de deux grandeurs est une droite passant par l'origine alors ces deux grandeurs sont proportionnelles.

EXEMPLE :

On a représenté graphiquement le tableau de valeurs de l'exemple plus haut.

La représentation graphique est une droite passant par l'origine donc les grandeurs A et B sont proportionnelles entre elles.



FICHE 21

EXPLOITER UNE SITUATION DE PROPORTIONNALITÉ

1. Tableau et graphique

Grandeur A	a	b
Grandeur B	c	d

PROPRIÉTÉ — Soit a, b, c et d quatre nombres et deux grandeurs A et B.
Dans un tableau de proportionnalité, les produits en croix sont égaux : $a \times d = b \times c$

MÉTHODE — Pour trouver la quatrième proportionnelle manquante, on peut utiliser l'égalité des produits en croix en multipliant les deux nombres en croix puis en divisant par le troisième nombre.

EXEMPLE : Un pot de piment d'Espelette de 40 grammes coûte 7,20 €. On se demande combien coûtent 500 grammes.

Masse de piment (en grammes)	40	500
Prix (en euros)	7,2	?

D'après l'égalité des produits en croix, on a :

$$? = \frac{7{,}2 \times 500}{40}$$

$$? = 90$$

500 grammes de piment d'Espelette coûtent 90 €.

2. Grandeurs composées - la vitesse

DÉFINITION — La formule de la vitesse est la suivante :

$$v\ (en\ km/h) = \frac{d\ (en\ km)}{t\ (en\ h)}$$

L'unité de la vitesse est en km/h. Cela correspond donc au nombre de kilomètres parcourus en 1 heure de temps.

EXEMPLE : Un train parcourt 380 km en 1h35min.

1) Quelle est sa vitesse moyenne en km/h ? On rappelle que 1h= 60min et que 1h= 3600 s.

2) Donner un arrondi au dixième près de sa vitesse moyenne en m/s ?

1) $v = \frac{d}{t} = \frac{380\ km}{1\ h\ 35\ min} = \frac{380\ km}{95\ min} = \frac{x\ km}{60\ min}$

$x = 380 \times 60 \div 95 = 240$

Le train roule donc à 240 km/h.

2) $v = \frac{240\ km}{1\ h} = \frac{240000\ m}{3600\ s} \approx 66{,}7$

Sa vitesse moyenne est environ 66,7 m/s.

FICHE 22

UTILISER UN POURCENTAGE DONNÉ AUGMENTATION / RÉDUCTION D'UNE QUANTITÉ

DÉFINITION — Un pourcentage est une façon d'exprimer une proportion ou une fraction sur 100.

- Dire que 16% des élèves portent des lunettes revient à dire que si l'on a 100 élèves, 16 portent des lunettes.
- 16% correspond au nombre $\frac{16}{100} = 0{,}16$

1. Utiliser un pourcentage donné

MÉTHODE — Pour calculer le pourcentage d'une quantité, il suffit de multiplier le pourcentage par la quantité.

EXEMPLE : Dans une classe, 16% des 25 élèves de la classe portent des lunettes.
Combien d'élèves portent des lunettes ?

Pour calculer 16 % de 25 élève, on effectue le calcul :

$$0{,}16 \times 25 \text{ élève} = 4 \text{ élève}$$

Donc 16% des 30 élèves représentent 4 élèves.

2. Lien avec l'augmentation et la réduction

PROPRIÉTÉ — Lorsque l'on :

- augmente une quantité de $x\%$, on multiplie cette quantité par $(1 + x\%)$.
- diminue/réduit une quantité de $x\%$, on multiplie cette quantité par $(1 - x\%)$

EXEMPLES :

Des chaussures coutant 130€sont remisées de 27%. Quel est le nouveau prix des chaussures ?

Réduire une quantité de 27% revient à multiplier cette quantité par $1 - \frac{27}{100}$.
Par conséquent, si on réduit 130€de 27%, cela donne :

$$13 \times (1 - \frac{27}{100}) = 130 \times (1 - 0{,}27) = 130 \times 0{,}73 = 94{,}9$$

Le nouveau prix des chaussures est 94,90€.

Un T-shirt coutant 15€est augmenté de 12%. Quel est le nouveau prix du T-shirt ?

Augmenter une quantité de 12% revient à multiplier cette quantité par $1 + \frac{12}{100}$.
Par conséquent, si on augmente 15€de 12%, cela donne :

$$15 \times (1 + \frac{12}{100}) = 15 \times (1 + 0{,}12) = 15 \times 1{,}12 = 16{,}80$$

Le nouveau prix du T-shirt est 16,80€.

FICHE 23

EXPRIMER UNE PROPORTION EN POURCENTAGE
TRAVAILLER AVEC LES RATIOS

1. Exprimer une proportion en pourcentage

DÉFINITION — Une proportion est un rapport (une division) entre deux grandeurs. Cette proportion est donc un nombre qui peut s'écrire sous la forme fractionnaire, décimale et sous forme de pourcentage exact ou approchée.

MÉTHODE — Pour exprimer une proportion en pourcentage, il suffit de calculer le rapport entre les deux grandeurs et de tronquer ce nombre aux centièmes (car un pourcentage est une fraction sur 100).

EXEMPLES :

Sur 160 élèves de troisièmes, 124 choisissent la voie générale et technologique. Quel est le pourcentage d'élèves qui choisissent la voie générale et technologique ?

$$\frac{124}{160} = 0{,}775$$

Il y a donc 77,5% des élèves qui choisissent la voie générale et technologique.

Une cafetière coute 70€. Après remise, elle coûte 50€. Quel est le pourcentage de réduction arrondi à l'unité près ?

La réduction est de $70 - 50 = 20$€
Le rapport entre la réduction et le prix initial est

$$\frac{20}{70} \approx 0{,}28571429...$$

Donc le pourcentage de réduction est environ de 29%.

2. Travailler avec les ratios

PROPRIÉTÉ —
On dit que deux nombres a et b sont dans le ratio $2:3$, si $\frac{a}{2} = \frac{b}{3}$.

MÉTHODE — Pour partager une quantité selon un ratio donné, il faut diviser la quantité par la somme des nombres du ratio. On obtient ainsi la quantité affectée pour "une part". Il ne reste qu'à multiplier selon le ratio donné.

EXEMPLES :

Certains écrans sont dans un ratio $16:9$ pour la longueur et la largeur. Quelle serait la largeur d'un écran de 76 cm de longueur ?

	Longueur	Largeur
Taille (cm)		76
Part(s)	16	9

Largeur $= 76 \times 9 \div 16 = 42{,}75$
La largueur mesurerait 42,75 cm de largeur.

Pour fabriquer un boisson à base de sirop, il faut mélanger du sirop et de l'eau selon le ratio $2:7$. Avec 30 cL de sirop, quelle est la contenance minimale de la carafe ?

	Sirop	Eau	Total
Volume (cL)	30		
Part(s)	2	7	9

Total $= 30 \times 9 \div 2 = 135$ et Eau $= 30 \times 7 \div 2 = 105$

Il faut une carafe de 135 cL pour accueillir 105 cL d'eau et les 30 cL de sirop.

FICHE 24

UTILISER LE VOCABULAIRE ANTÉCÉDENT ET IMAGE

DÉFINITION — Une fonction en mathématiques est un procédé qui à un nombre de départ (appelé antécédent) fait correspondre un nombre d'arrivée (appelé image).

EXEMPLE : Un kilogramme d'oranges coûte 2,20€. Son prix sera donc $2{,}20 \times x = 2{,}20x$. On appelle x le nombre de kilogramme d'oranges et f la fonction qui au nombre de kilogrammes fait correspondre le prix à payer.

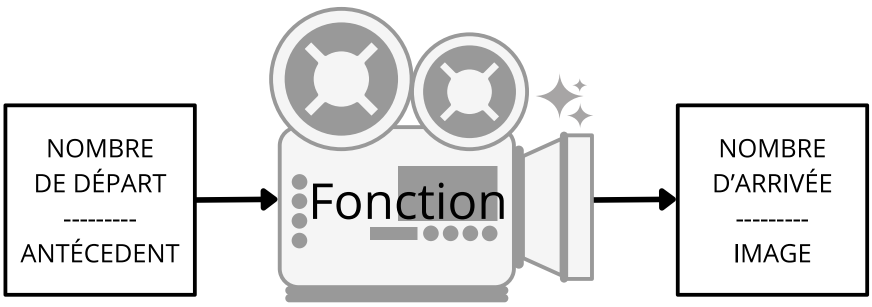
On peut noter $f(x) = 2{,}20x$ ou encore $f : x \mapsto 2{,}20x$

Pour 3 kilogrammes d'oranges, soit $x = 3$ on a :

$$f(3) = 2{,}2 \times 3 = 6{,}6.$$

3 est l'antécédent de 6 par la fonction f.

6 est l'image de 3 par la fonction f.



MÉTHODE — On appelle f une fonction, x sa variable et a un nombre.
Pour calculer l'image d'un nombre a par la fonction f, il faut remplacer x par a puis effectuer les calculs.
Pour déterminer le ou les antécédents d'un nombre a par une fonction f, il faut résoudre l'équation $f(x) = a$.

EXEMPLES : Soit $f(x) = -7x + 2$.

1) Calculer l'image de 4 par la fonction f.

2) Déterminer le ou les antécédent(s) de -33 par la fonction f.

1)

$$f(4) = -7 \times 4 + 2$$
$$f(4) = -28 + 2$$
$$f(4) = -26$$

L'image de 4 par la fonction f est -26.

2) On cherche l'antécédent de -33 par la fonction f, c'est-à-dire le nombre x tel que $f(x) = -33$.
Or, la fonction f est définie par :

$$f(x) = -7x + 2.$$

Par conséquent, on a :

$$-7x + 2 = -33$$
$$-7x = -35$$
$$x = \frac{-35}{-7}$$

L'antécédent de -33 par la fonction f est 5.

FICHE 25

CONSTRUIRE LA COURBE REPRÉSENTATIVE D'UNE FONCTION AVEC UN TABLEAU DE VALEURS

DÉFINITION — On appelle f une fonction, x sa variable et M un point du plan.
La courbe représentative de la fonction f est l'ensemble des points M du plan dont les coordonnées sont $(x; f(x))$.

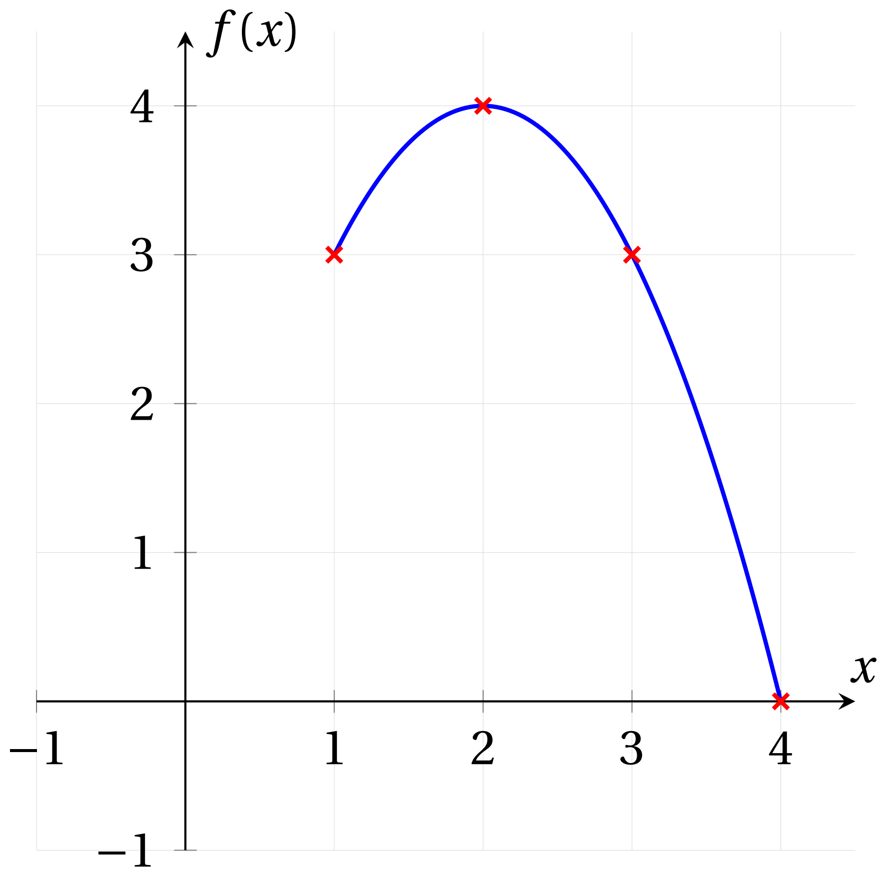
MÉTHODE — Pour tracer la courbe représentative d'une fonction, il faut :

- construire un tableau de valeurs de la fonction avec suffisamment de points ;
- placer chaque point dans le plan ;
- relier **à la main** (sans la règle) chaque point.

EXEMPLE : Traçons la courbe représentative de la fonction f définie par $f(x) = 4x - x^2$

$f(1) = 4 \times 1 - 1^2 = 3$
$f(2) = 4 \times 2 - 2^2 = 4$
$f(3) = 4 \times 3 - 3^2 = 3$
$f(4) = 4 \times 4 - 4^2 = 0$

x	1	2	3	4
$f(x)$	3	4	3	0



FICHE 26

CONNAÎTRE ET UTILISER LA FONCTION AFFINE

DÉFINITION — Une fonction f est appelée **fonction affine** lorsqu'il existe deux nombres a et b tels que, pour tout nombre x, on puisse écrire $f(x) = ax + b$.

PROPRIÉTÉ — Dans le plan muni d'un repère, la courbe représentative d'une fonction affine est une droite.

EXEMPLES :

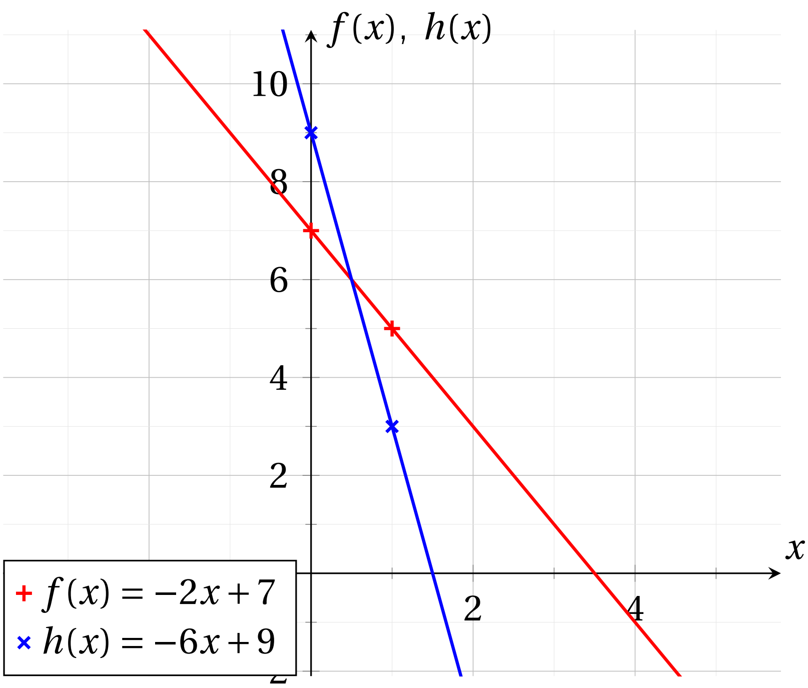
- La fonction f définie pour tout nombre x par $f(x) = -2x + 7$ est une fonction affine.
- La fonction g définie pour tout nombre x par $g(x) = -x^2 + 9x + 3$ n'est pas une fonction affine.
- La fonction h définie pour tout nombre x par $h(x) = -2x(-x+3) - 2^2 + 9$ est une fonction affine.
  En effet, après développement et réduction, on a pour tout nombre x, $h(x) = -6x + 9$.

MÉTHODE — Pour tracer la représentation graphique d'une fonction affine, il faut tracer la droite reliant deux points vérifiant la fonction. Pour cela, on choisit deux antécédents au hasard (souvent 0 et 1) et on calcule leur image par la fonction.

EXEMPLES : On prendra les fonctions f et h définies plus haut.

Comme f est une fonction affine, alors sa représentation graphique est une droite.
Je choisis $x = 0$. Son image est $f(0) = -2 \times 0 + 7 = 0 + 7 = 7$. On place le point de coordonnées $(0;7)$.
Je choisis $x = 1$. Son image est $f(1) = -2 \times 1 + 7 = -2 + 7 = 5$. On place le point de coordonnées $(1;5)$.

Comme h est une fonction affine, alors sa représentation graphique est une droite.
Je choisis $x = 0$. Son image est $h(0) = -6 \times 0 + 9 = 0 + 9 = 9$. On place le point de coordonnées $(0;9)$.
Je choisis $x = 1$. Son image est $h(1) = -6 \times 1 + 9 = -6 + 9 = 3$. On place le point de coordonnées $(1;3)$.



FICHE 27

CONNAÎTRE ET UTILISER LA FONCTION LINÉAIRE

DÉFINITION — Une fonction f est appelée **fonction linéaire** lorsqu'il existe un nombre a tel que, pour tout nombre x, on puisse écrire $f(x) = ax$.

PROPRIÉTÉ — Dans le plan muni d'un repère, la courbe représentative d'une fonction linéaire est une droite passant par l'origine.

EXEMPLES :

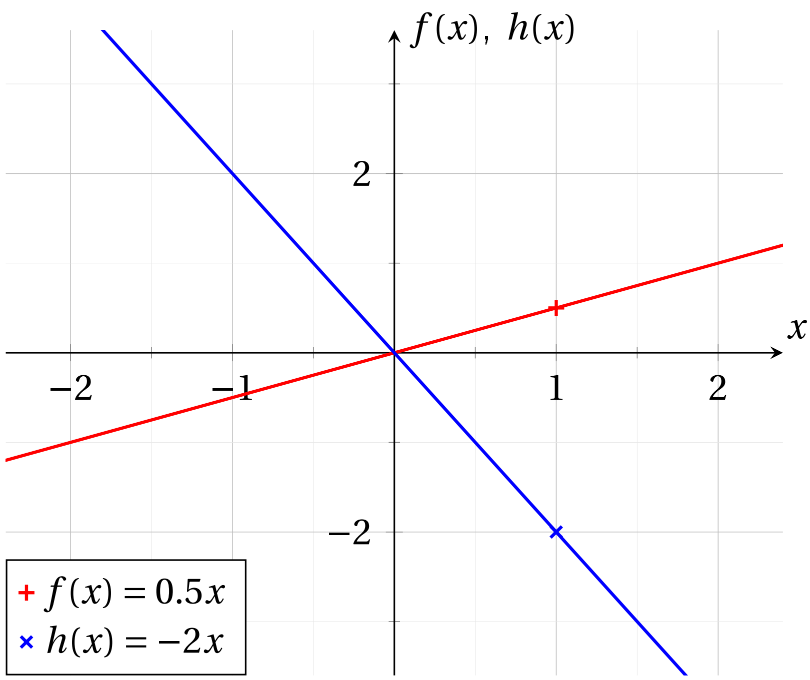
- La fonction f définie pour tout nombre x par $f(x) = 0.5x$ est une fonction linéaire.
- La fonction g définie pour tout nombre x par $g(x) = 8x^2$ n'est pas une fonction linéaire.
- La fonction h définie pour tout nombre x par $h(x) = x(x-2) - x^2$ est une fonction linéaire.
  En effet, après développement et réduction, on a pour tout nombre x, $h(x) = -2x$.

MÉTHODE — Pour tracer la représentation graphique d'une fonction linéaire, il faut tracer la droite reliant l'origine du repère et un point vérifiant la fonction. Pour cela, on choisit un antécédent au hasard (souvent 1) et on calcule son image par la fonction.

EXEMPLES : On prendra les fonctions f et h définies plus haut.

Comme la fonction f est une fonction linéaire, alors sa représentation graphique est une droite passant par l'origine du repère.
Je choisis $x = 1$. Son image est $f(1) = 0{,}5 \times 1 = 0{,}5$. On place le point de coordonnées $(1; 0{,}5)$.

Comme la fonction h est une fonction linéaire, alors sa représentation graphique est une droite passant par l'origine du repère.
Je choisis $x = 1$. Son image est $h(1) = -2 \times 1 = -2$. On place le point de coordonnées $(1; -2)$.



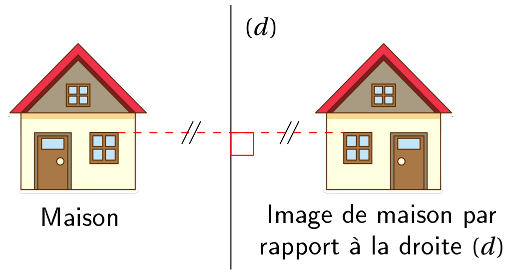
Fiche 28

Reconnaître des images par transformation géométrique

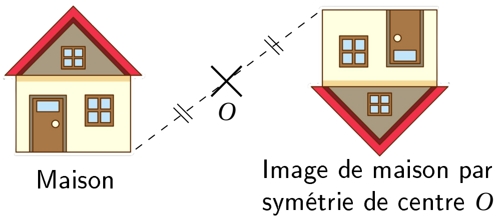
1. La symétrie axiale

Une symétrie axiale transforme une figure par effet miroir par rapport à un axe de symétrie.

Dans notre exemple, les deux maisons sont à la même distance de la droite (d) et la ligne pointillée est perpendiculaire à la droite (d).



2. La symétrie centrale

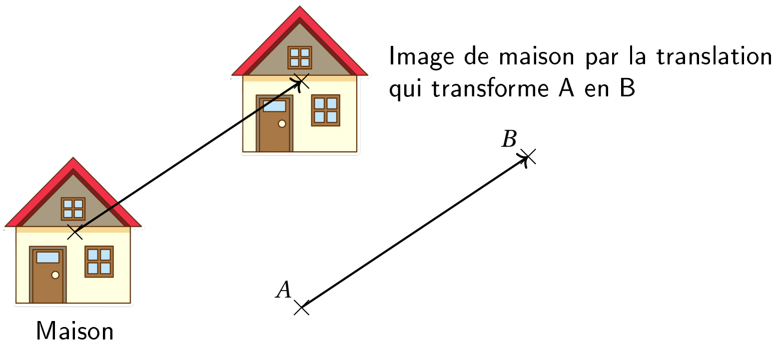


Une symétrie centrale correspond à un demi-tour d'une figure autour d'un point que l'on appelle centre.

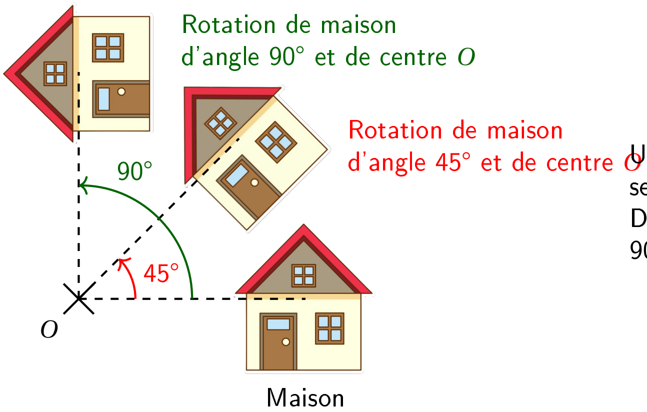
Dans notre exemple, les deux maisons sont alignés avec le centre O et elles sont à la même distance du point O.

3. La translation

Une translation est un glissement d'une figure dans une direction, un sens et une longueur donnés matérialisé par une flèche.



4. La rotation



Une rotation fait tourner une figure autour d'un point selon un angle.
Dans notre exemple, la maison a tourné de 45° et 90° autour du centre O

Fiche 29

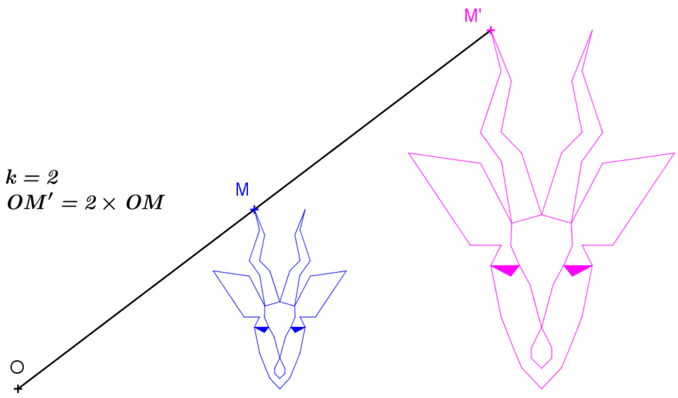
Les homothéties

Définition — Une homothétie est une transformation qui agrandit ou réduit une figure en la faisant glisser. Cette transformation est définie par un centre et un rapport que l'on appellera k.

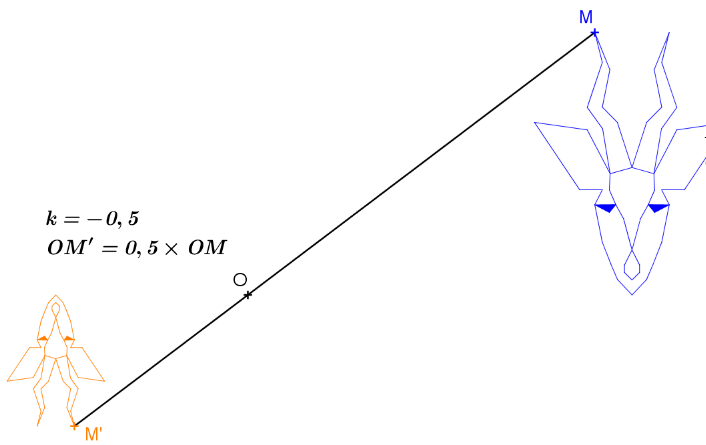
1. Homothétie de rapport positif

M' est l'image de M par l'homothétie de centre O et de rapport 2 :

- Les points O, M et M' sont alignés ;
- M et M' sont du même côté par rapport à O ;
- $OM' = 2 \times OM$.



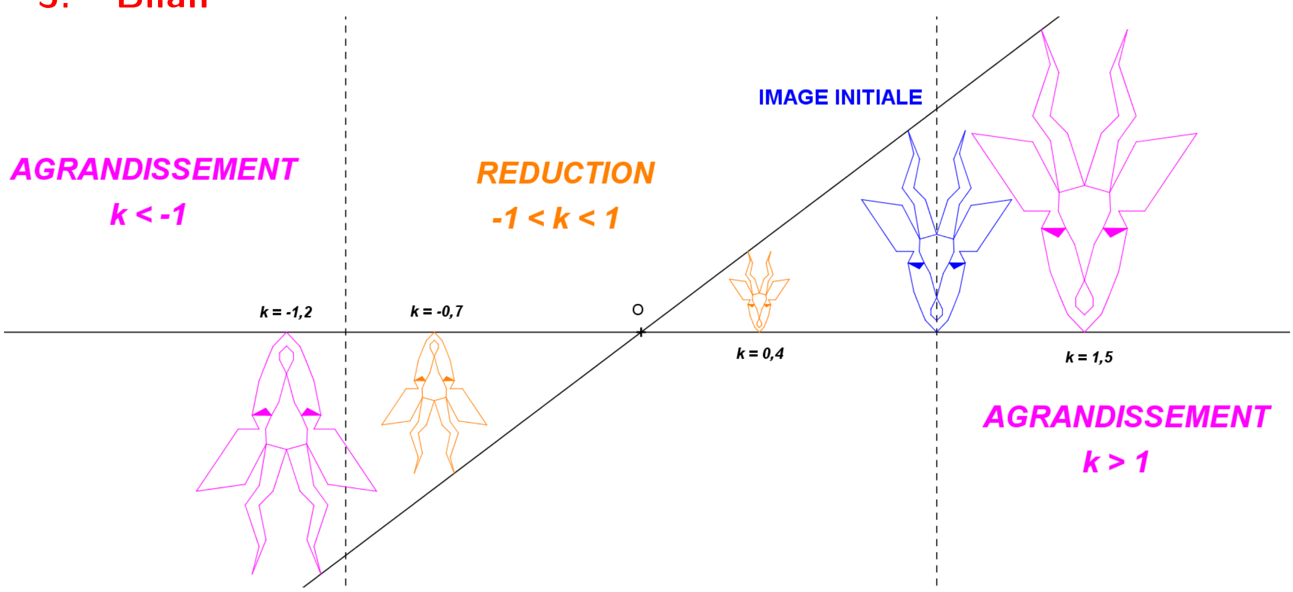
2. Homothétie de rapport négatif



M' est l'image de M par l'homothétie de centre O et de rapport 0,5 :

- Les points O, M et M' sont alignés ;
- M et M' ne sont pas du même côté par rapport à O ;
- $OM' = 0,5 \times OM$.

3. Bilan



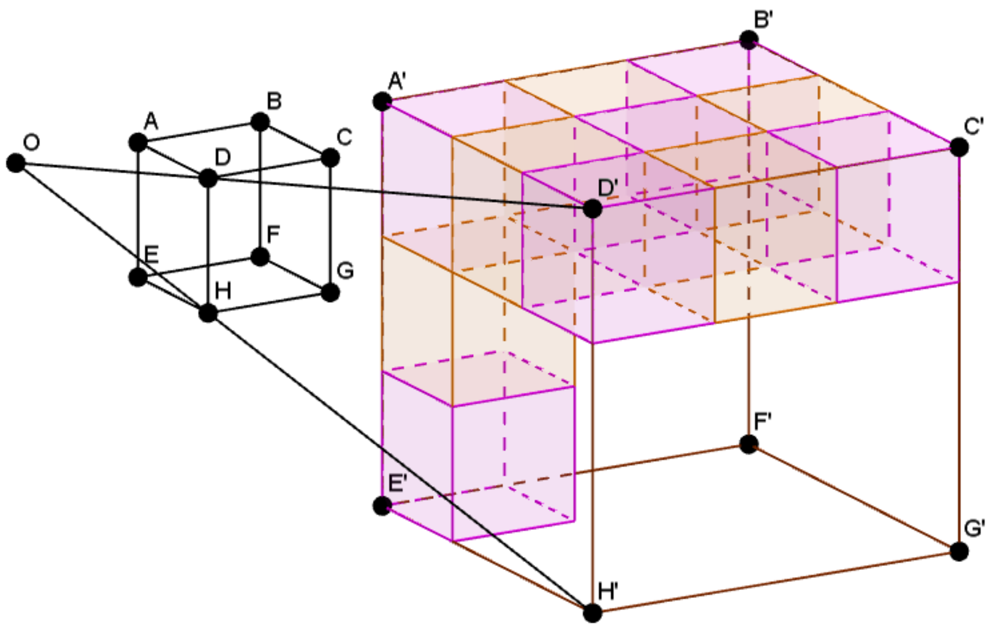
Fiche 30

Calculer une longueur, une aire ou un volume en s'aidant du rapport d'agrandissement ou de réduction

Propriété — On appelle k le nombre non nul définissant le rapport d'une homothétie. Par ce nombre, on peut dire que lors d'un agrandissement ou d'une réduction :

- les longueurs (et périmètre) sont multipliés par k ;
- les aires sont multipliés par k^2 ;
- les volumes sont multipliés par k^3.

Exemples : On considère l'homothétie de rapport 3 et de centre O. $ABCDEFGH$ est un cube et $A'B'C'D'E'F'G'H'$ est son image par cette homothétie.



D'après la propriété on a bien :

- $E'H' = 3 \times EH \Rightarrow$ On a bien multiplié la longueur par $k = 3$.
- On a 9 carrés $ABCD$ sur la grande face.
  $Aire_{A'B'C'D'} = 9 \times Aire_{ABCD} \Rightarrow$ On a bien multiplié l'aire par $k^2 = 3^2 = 9$.
- On a bien 27 cubes $ABCDEFGH$ dans le grand cube.
  $Volume_{A'B'C'D'E'F'G'H'} = 27 \times Volume_{ABCDEFGH} \Rightarrow$ On a bien multiplié le volume par $k^3 = 3^3 = 3 \times 3 \times 3 = 27$.

FICHE 31

CALCULER UN RAPPORT D'AGRANDISSEMENT OU DE RÉDUCTION

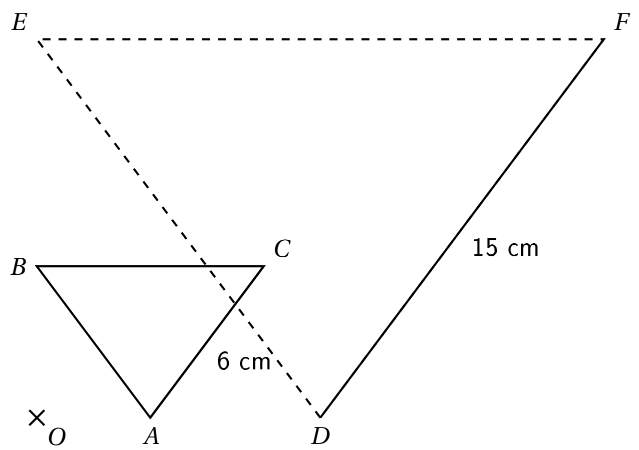
MÉTHODE — Pour calculer un rapport d'agrandissement ou de réduction, il faut calculer le rapport (la division) entre deux côtés homologues.

- Si $k > 0$ alors on parlera d'un agrandissement et réciproquement.
- Si $k < 0$ alors on parlera d'une réduction et réciproquement.

EXEMPLE : On considère les triangles ABC et DEF.

(a) Calculer le rapport k de l'homothétie transformant le triangle ABC en le triangle DEF.

(b) Calculer le rapport k' de l'homothétie transformant le triangle DEF en le triangle ABC.



(a) $[DF]$ est l'image du segment $[AC]$.

On a donc : $DF = k \times AC$

Donc $k = \dfrac{DF}{AC} = \dfrac{15}{6} = 2{,}5$

Le rapport de cette homothétie est 2,5. Ceci est rassurant car il s'agit bien d'un agrandissement.

(b) $[AC]$ est l'image du segment $[DF]$.

On a donc : $AC = k' \times DF$

Donc $k' = \dfrac{AC}{DF} = \dfrac{6}{15} = 0{,}4$

Le rapport de cette homothétie est 0,4. Ceci est rassurant car il s'agit bien d'une réduction.

Fiche 32

Calculer une longueur de segment avec le théorème de Pythagore

Propriété — Si un triangle est rectangle alors le carré de la longueur de son hypoténuse est égal à la somme des carrés des deux autres longueurs.

Méthode — Pour calculer une longueur avec le théorème de Pythagore, le raisonnement est important :

(a) Cite la condition → triangle rectangle ;

(b) Cite le théorème de Pythagore ;

(c) Écris l'égalité de Pythagore ;

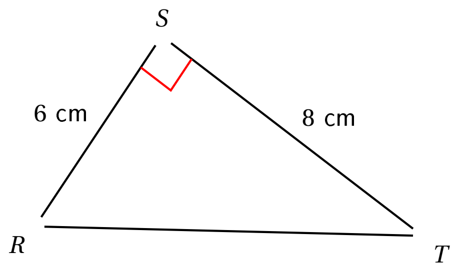
(d) Passe aux calculs ;

(e) Écris une phrase de conclusion.

---

1. Calculer la longueur de l'hypoténuse

On considère la figure suivante qui n'est pas à l'échelle. On cherche à calculer la longueur RT.



Rédaction possible

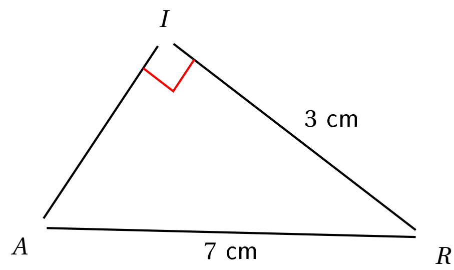
Dans le triangle RST rectangle en S, le théorème de Pythagore permet d'écrire :

$$RT^2 = RS^2 + ST^2$$
$$RT^2 = 6^2 + 8^2$$
$$RT^2 = 36 + 64$$
$$RT^2 = 100$$
$$RT = \sqrt{100}$$
$$RT = 10 \text{ cm}$$

La longueur RT est égale à 10 cm.

2. Calculer la longueur d'un côté autre que l'hypoténuse

On considère la figure suivante qui n'est pas à l'échelle. On cherche à calculer la longueur AI au centième de centimètres près.



Rédaction

Dans le triangle AIR rectangle en I, le théorème de Pythagore permet d'écrire :

$$AR^2 = AI^2 + IR^2$$
$$7^2 = AI^2 + 3^2$$
$$49 = AI^2 + 9$$
$$AI^2 = 49 - 9$$
$$AI^2 = 40$$
$$AI = \sqrt{40}$$
$$AI \approx 6{,}32 \text{ cm}$$

La longueur AI est environ égale à 6,32 cm.

FICHE 33

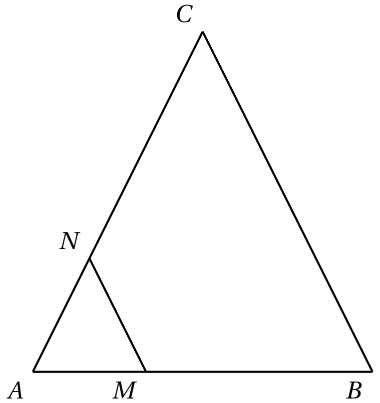
CALCULER UNE LONGUEUR DE SEGMENT AVEC LE THÉORÈME DE THALÈS

PROPRIÉTÉ — THÉORÈME DE THALÈS

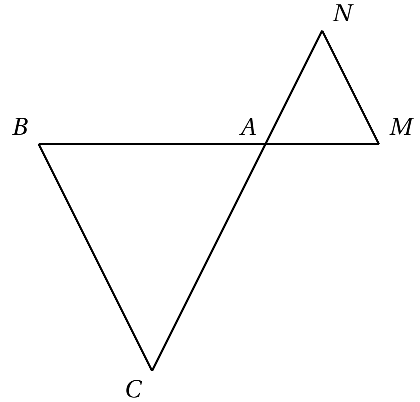
Soit A un point du plan et BM et CN deux droites sécantes en A.
Si les droites (BM) et (CN) sont parallèles alors on a :

$$\frac{AM}{AB}=\frac{AN}{AC}=\frac{MN}{BC} \text{ ou } \frac{AB}{AM}=\frac{AC}{AN}=\frac{BC}{MN}$$

CONFIGURATION EMBOÎTÉE



CONFIGURATION PAPILLON



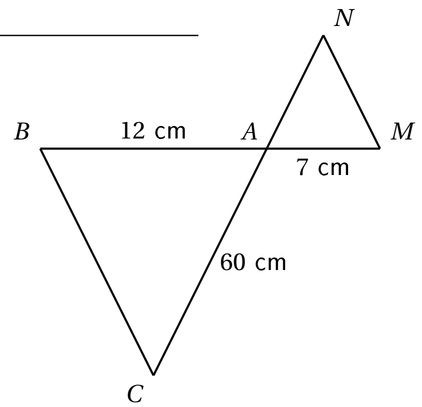
MÉTHODE — Pour calculer une longueur avec le théorème de Thalès, le raisonnement est important :

(a) Cite les conditions → Points alignés ou droites sécantes et droites parallèles ;

(b) Cite le théorème de Thalès et écris son égalité avec les lettres ;

(c) Passe aux calculs sans oublier la phrase de conclusion.

Rédaction possible d'un exercice



ÉNONCÉ : On considère la figure ci-contre qui n'est pas à l'échelle. On cherche à calculer la longueur AN sachant que les droites (BC) et (MN) sont parallèles.

RÉDACTION :
Les droites (MB) et (NC) sont sécantes en A.
Les droites (BC) et (MN) sont parallèles.
Le théorème de Thalès permet d'écrire :

$$\frac{AM}{AB}=\frac{AN}{AC}=\frac{MN}{BC}$$
$$\frac{7}{12}=\frac{AN}{60}=\frac{MN}{BC}$$
$$AN=\frac{60\times 7}{12}=35 \text{ cm}$$

La longueur de $[AN]$ est égale à 35 cm.

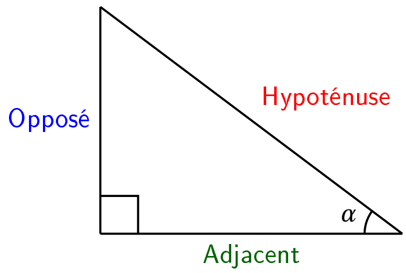
FICHE 34

CALCULER UNE LONGUEUR DE SEGMENT AVEC LA TRIGONOMÉTRIE

PROPRIÉTÉ — On considère un triangle rectangle dont la mesure d'un de ses angles aigus est appelé α (alpha).On appelle "Adjacent" le côté adjacent à l'angle α qui n'est pas l'hypoténuse et "Opposé" le côté opposé à l'angle α.

Dans ce triangle rectangle, on a :

- $\cos(\alpha) = \dfrac{\text{Adjacent}}{\text{Hypoténuse}}$
- $\sin(\alpha) = \dfrac{\text{Opposé}}{\text{Hypoténuse}}$
- $\tan(\alpha) = \dfrac{\text{Opposé}}{\text{Adjacent}}$



Pour retenir

C A H S O H T O A

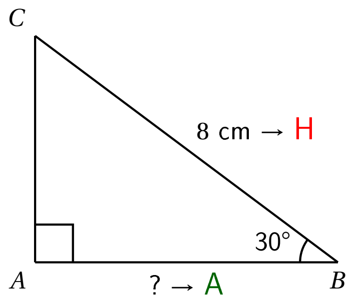
MÉTHODE — Pour calculer la longueur d'un segment en utilisant la trigonométrie, il faut :

(a) Cite la condition → triangle rectangle ;

(b) Écris ce que tu cherches et ce dont tu disposes pour savoir si il faut utiliser le cosinus, le sinus ou la tangente.

(c) Écris la formule avec les lettres du triangle puis passe aux calculs.

EXEMPLES : On dispose de trois figures qui ne sont pas à l'échelle et dont l'on recherche la longueur du segment matérialisée par le " ?".

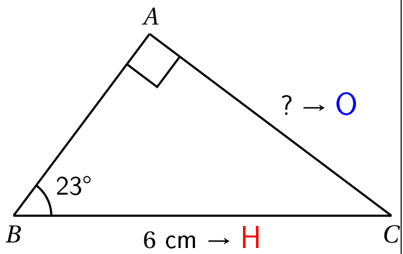


C A H

Dans le triangle BAC, rectangle en A, on a :

$$\cos(\widehat{ABC}) = \frac{BA}{BC}$$
$$\cos(30°) = \frac{BA}{8}$$
$$8 \times \cos(30°) = BA$$
$$6{,}93 \text{ cm} \approx BA$$

Le segment $[BA]$ mesure approximativement 6.93cm.

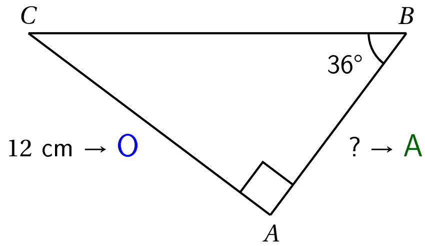


S O H

Dans le triangle BAC, rectangle en A, on a :

$$\sin(\widehat{ABC}) = \frac{AC}{BC}$$
$$\sin(23°) = \frac{AC}{6}$$
$$6 \times \sin(23°) = AC$$
$$2{,}34 \text{ cm} \approx AC$$

Le segment $[AC]$ mesure approximativement 2.34cm.



T O A

Dans le triangle BAC, rectangle en A, on a :

$$\tan(\widehat{ABC}) = \frac{AC}{BA}$$
$$\tan(36°) = \frac{12}{BA}$$
$$BA = \frac{12}{\tan(36°)}$$
$$BA \approx 16{,}52 \text{ cm}$$

Le segment $[BA]$ mesure approximativement 16.52cm.

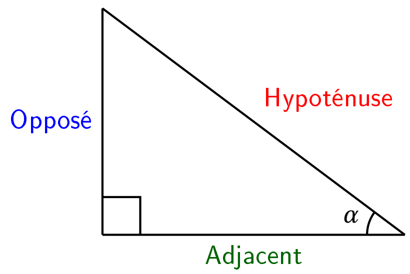
FICHE 35

CALCULER LA MESURE D'UN ANGLE AVEC LA TRIGONOMÉTRIE

PROPRIÉTÉ — On considère un triangle rectangle dont la mesure d'un de ses angles aigus est appelé α (alpha).On appelle "Adjacent" le côté adjacent à l'angle α qui n'est pas l'hypoténuse et "Opposé" le côté opposé à l'angle α.

Dans ce triangle rectangle, on a :

- $\cos(\alpha) = \dfrac{\text{Adjacent}}{\text{Hypoténuse}}$
- $\sin(\alpha) = \dfrac{\text{Opposé}}{\text{Hypoténuse}}$
- $\tan(\alpha) = \dfrac{\text{Opposé}}{\text{Adjacent}}$

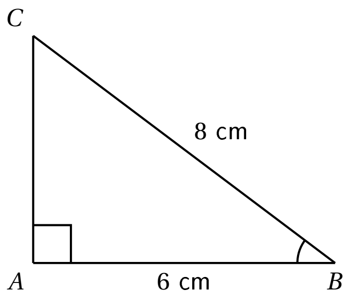


Pour retenir

C A H S O H T O A

MÉTHODE — Pour calculer la mesure d'un angle en utilisant la trigonométrie, le raisonnement et la rédaction reste identique à celle pour calculer la longueur d'un segment avec la trigonométrie.
La différence sera l'utilisation des touches arccos (ou cos^{-1}), arcsin (ou sin^{-1}) et arctan (ou tan^{-1}) selon les calculatrices à la fin des calculs.

EXEMPLE : Calculons la mesure de l'angle $\widehat{ABC}$ au centième de degré près de la figure suivante :



Rédaction

On connait la longueur du côté adjacent AB et de l'hypoténuse BC à l'angle $\widehat{ABC}$.

On choisit donc le cosinus.

C A H

Dans le triangle BAC, rectangle en A, on a :

$$\cos(\widehat{ABC}) = \frac{BA}{BC}$$
$$\cos(\widehat{ABC}) = \frac{6}{8}$$
$$\widehat{ABC} \approx 41{,}41°$$

L'angle $\widehat{ABC}$ mesure approximativement 41,41°.

Calculatrice

Ce qu'il faut taper à la calculatrice :

Ce que la calculatrice affiche à l'écran :

Fiche 36

Montrer qu'un triangle est rectangle avec la réciproque du théorème de Pythagore

Propriété — Réciproque du théorème de PythagoreRéciproque du théorème de Pythagore

On considère un triangle ABC.
Si $BC^2 = AB^2 + AC^2$ alors le triangle ABC est rectangle en A.

Méthode — Pour montrer qu'un triangle est rectangle avec la réciproque du théorème de Pythagore, il faut :

(a) représenter la figure à main levée ou à la règle ; (facultatif)

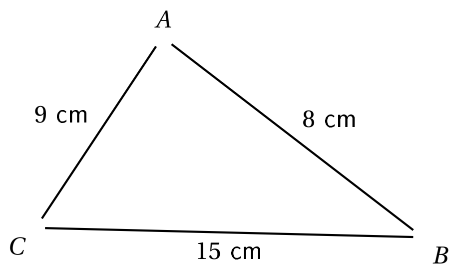
(b) vérifier si l'on a l'égalité de Pythagore en calculant **séparément** chaque membre de l'égalité.

(c) citer la réciproque utilisée ;

(d) conclure.

Exemple : On considère un triangle ABC tel que $BC = 15$ cm ; $AB = 12$ cm et $AC = 9$ cm.
Montrer que le triangle ABC est rectangle en A.

Représentation de la figure



Rédaction possible

Dans le triangle BAC, $[BC]$ est le plus grand côté.

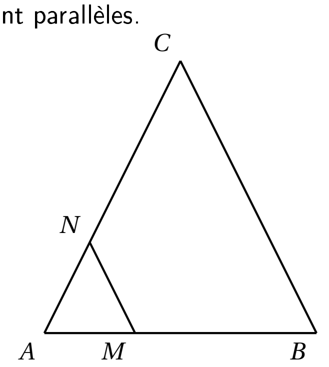
$$\left.\begin{array}{l} BC^2 = 15^2 = 225 \\ BA^2 + AC^2 = 12^2 + 9^2 = 144 + 81 = 225 \end{array}\right\} BC^2 = BA^2 + AC^2$$

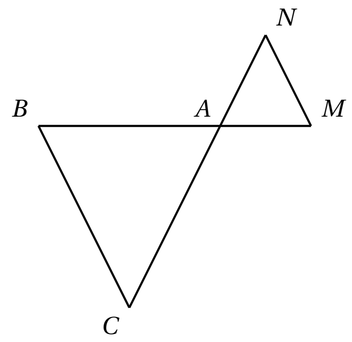
Comme $BC^2 = BA^2 + AC^2$, alors le triangle BAC est rectangle en A d'après la réciproque du théorème de Pythagore.

Montrer du parallélisme avec la réciproque du théorème de Thalès

Propriété — Réciproque du théorème de Thalès

On considère deux droites (BM) et (CN) sécantes en A.
Si les points A, B, M et les points$A$, C, N sont alignés dans le même ordre et $\dfrac{AB}{AM} = \dfrac{AC}{AN}$ alors les droites (BC) et (MN) sont parallèles.





Méthode — Pour montrer que des droites sont parallèles avec la réciproque du théorème de Thalès, il faut :

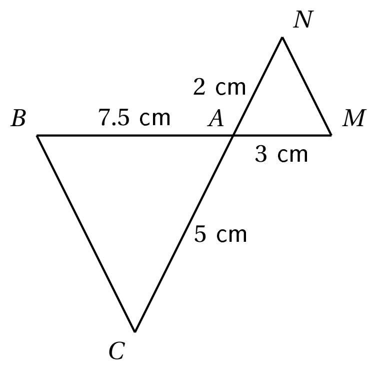
(a) dire que les points sont alignés dans le même ordre ;

(b) vérifier que l'égalité de Thalès soit vraie par comparaison de fractions ou par l'égalité des produits en croix ;

(c) citer la réciproque utilisée et conclure.

Exemple :

On considère la figure ci-contre où les droites (EC) et (BD) se coupent en A.
Montrer que les droites (BC) et (MN) sont parallèles.



Rédaction possible avec la comparaison de fractions

Les points A,M,B et les points A,N,C sont alignés dans le même ordre.

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{AM}{AB}=\dfrac{3}{7,5}=\dfrac{2}{5}=0,4\\ \dfrac{AN}{AC}=\dfrac{2}{5}=0,4\end{array}\right\}\dfrac{AM}{AB}=\dfrac{AN}{AC}$$

D'après la réciproque du théorème de Thalès,les droites (BC) et (MN) sont parallèles.

Rédaction possible avec l'égalité des produits en croix

Les points A,M,B et les points A,N,C sont alignés dans le même ordre.

$$\frac{AM}{AB}=\frac{3}{7,5} \qquad \frac{AN}{AC}=\frac{2}{5}$$

Effectuons les produits en croix :

$$\left.\begin{array}{l}3\times 5=15\\ 2\times 7,5=15\end{array}\right\}\dfrac{AM}{AB}=\dfrac{AN}{AC}$$

D'après la réciproque du théorème de Thalès,les droites (BC) et (MN) sont parallèles.

FICHE 38

MONTRER QUE DEUX TRIANGLES SONT SEMBLABLES

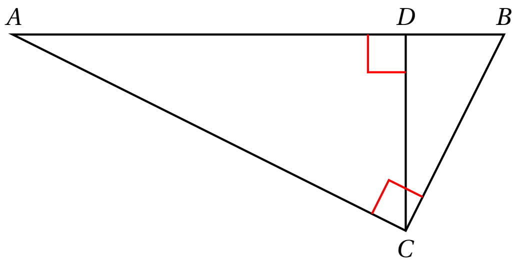
DÉFINITION — Des triangles sont dits semblables lorsqu'ils ont des angles deux à deux égaux.

PROPRIÉTÉ — Si les longueurs des côtés d'un triangle sont proportionnelles aux longueurs des côtés d'un autre triangle alors ces deux triangles sont semblables.

MÉTHODE — Pour montrer que deux triangles sont semblables on peut :
- montrer qu'ils ont des angles deux à deux égaux ;
- montrer que les longueurs des côtés d'un des triangles sont proportionnelles aux longueurs des côtés de l'autre triangle.

EXEMPLES : Les figures ci-dessous ne sont pas à l'échelle.

Montrer que les triangles ADC et ABC sont semblables.
Les points A, D et B sont alignés.



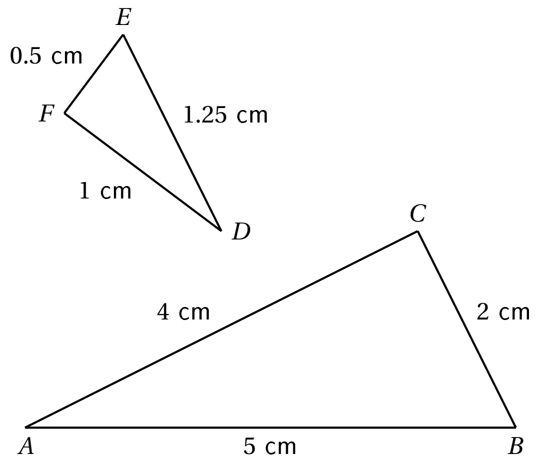
RÉDACTION POSSIBLE AVEC UN RAISONNEMENT SUR LES ANGLES

On sait que :

- $\widehat{ADC} = \widehat{ACB} = 90°$
- $\widehat{DAC} = \widehat{BAC}$ car ces angles se superposent.
- D'après la propriété des 180°, le dernier couple d'angles est de même mesure ; $\widehat{ACD} = \widehat{ABC}$.

  Les triangles ADC et ABC possèdent des angles deux à deux de même mesure donc ils sont semblables.

Montrer que les triangles ABC et DEF sont semblables.



RÉDACTION POSSIBLE AVEC UN RAISONNEMENT SUR LES LONGUEURS

On ordonne de manière croissante les longueurs des côtés des deux triangles.

Côtés de ABC	$AB = 5$ cm	$AC = 4$ cm	$BC = 2$ cm
Côtés de DEF	$DE = 1.25$ cm	$DF = 1$ cm	$EF = 0.5$ cm

$\dfrac{AB}{DE} = \dfrac{5}{1.25} = 4$ $\qquad \dfrac{AC}{DF} = \dfrac{4}{1} = 1$ $\qquad \dfrac{2}{0.5} = 4$

Les longueurs des côtés du triangle ABC sont proportionnelles aux longueurs des côtés du triangle DEF.

Donc les triangles ABC et DEF sont semblables.

FICHE 39

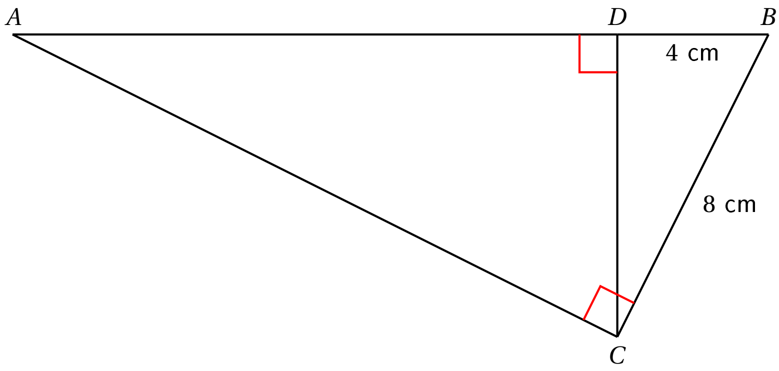
UTILISER DES TRIANGLES SEMBLABLES POUR CALCULER DES LONGUEURS

PROPRIÉTÉ — Si deux triangles sont semblables alors les longueurs des côtés d'un triangle sont proportionnelles aux longueurs des côtés de l'autre triangle

---

MÉTHODE — Calculer une longueur avec des triangles semblables revient à résoudre un problème de proportionnalité.
Pour cela, on peut réaliser un tableau dans lequel on ordonne de manière croissante (ou décroissante) les longueurs de chacun des triangles.
Pour trouver la longueur manquante, on utilisera l'égalité des produits en croix.

EXEMPLE : On considère la figure ci-dessous qui n'est pas à l'échelle. Les triangles ABC et BCD sont semblables. On demande de calculer la longueur AB.



Comme les triangles sont semblables, les longueurs des côtés de l'un sont proportionnelles aux longueurs des côtés de l'autre. On range dans l'ordre croissant les longueurs des côtés de chaque triangle.

Côtés de ABC	AB cm	AC cm	$BC = 8$ cm
Côtés de BCD	$BC = 8$ cm	DC cm	$DB = 4$ cm

On a :

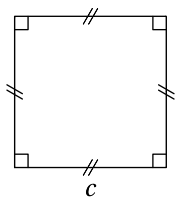
$$\frac{AB}{BC} = \frac{AC}{DC} = \frac{BC}{DB}$$
$$\frac{AB}{8} = \frac{AC}{DC} = \frac{8}{4}$$
$$AB = 8 \times 8 \div 4$$
$$AB = 16$$

La longueur AC est 16 cm.

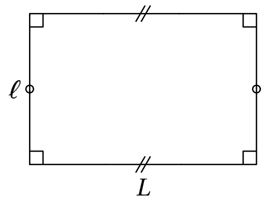
Fiche 40

Calculer un périmètre ou une aire
Tableaux de conversion

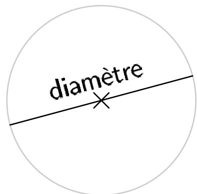
1. Périmètres de figures usuelles et tableau de conversion



Périmètre d'un carré :
$4 \times c$



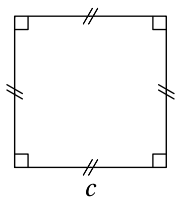
Périmètre d'un rectangle :
$2 \times (L + \ell)$



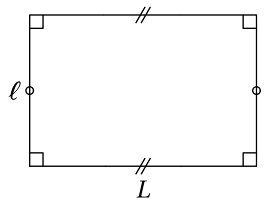
Périmètre d'un cercle :
$\pi \times$ diamètre

km	hm	dam	m	dm	cm	mm

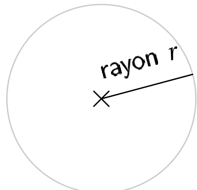
2. Aires de figures usuelles et tableau de conversion



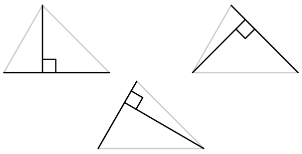
Aire d'un carré :
$c \times c$



Aire d'un rectangle :
$L \times \ell$



Aire d'un disque :
$\pi \times r \times r$

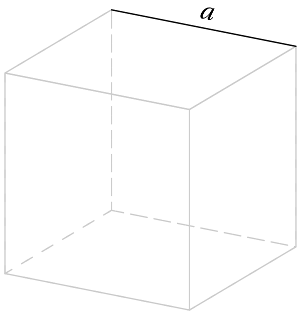


Aire d'un triangle :
$$\frac{\text{côté} \times \text{hauteur relative à ce côté}}{2}$$

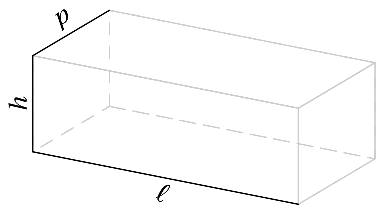
km^2	hm^2	dam^2	m^2	dm^2	cm^2	mm^2

Fiche 41

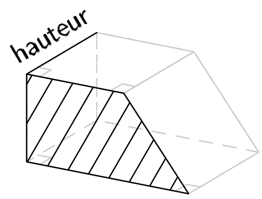
Calculer un volume
Tableau de conversion



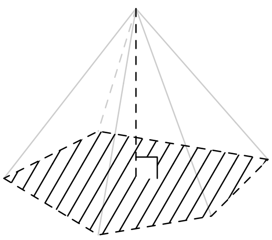
Volume d'un cube :
$a^3 \quad (a \times a \times a)$



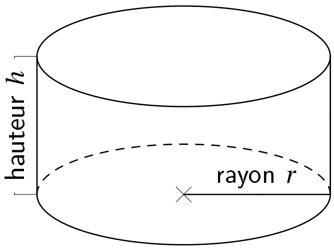
Volume d'un pavé droit : $\ell \times h \times p$



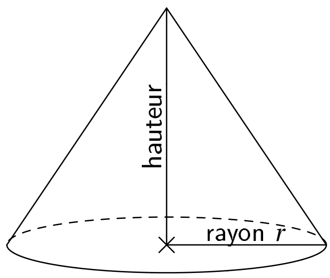
Volume d'un prisme droit :
Aire de la base × hauteur



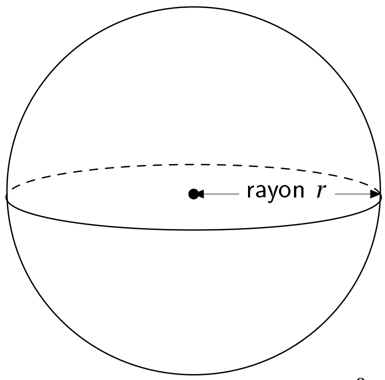
Volume d'une pyramide : $\dfrac{\text{Aire de la base} \times \text{hauteur}}{3}$



Volume d'un cylindre de révolution : $\pi \times r^2 \times h$



Volume d'un cône de révolution : $\dfrac{\pi \times r^2 \times h}{3}$



Volume d'une boule : $\dfrac{4 \times \pi \times r^3}{3}$

km^3	hm^3	dam^3	m^3	dm^3	cm^3	mm^3

Fiche 42

Repérage sur une sphère

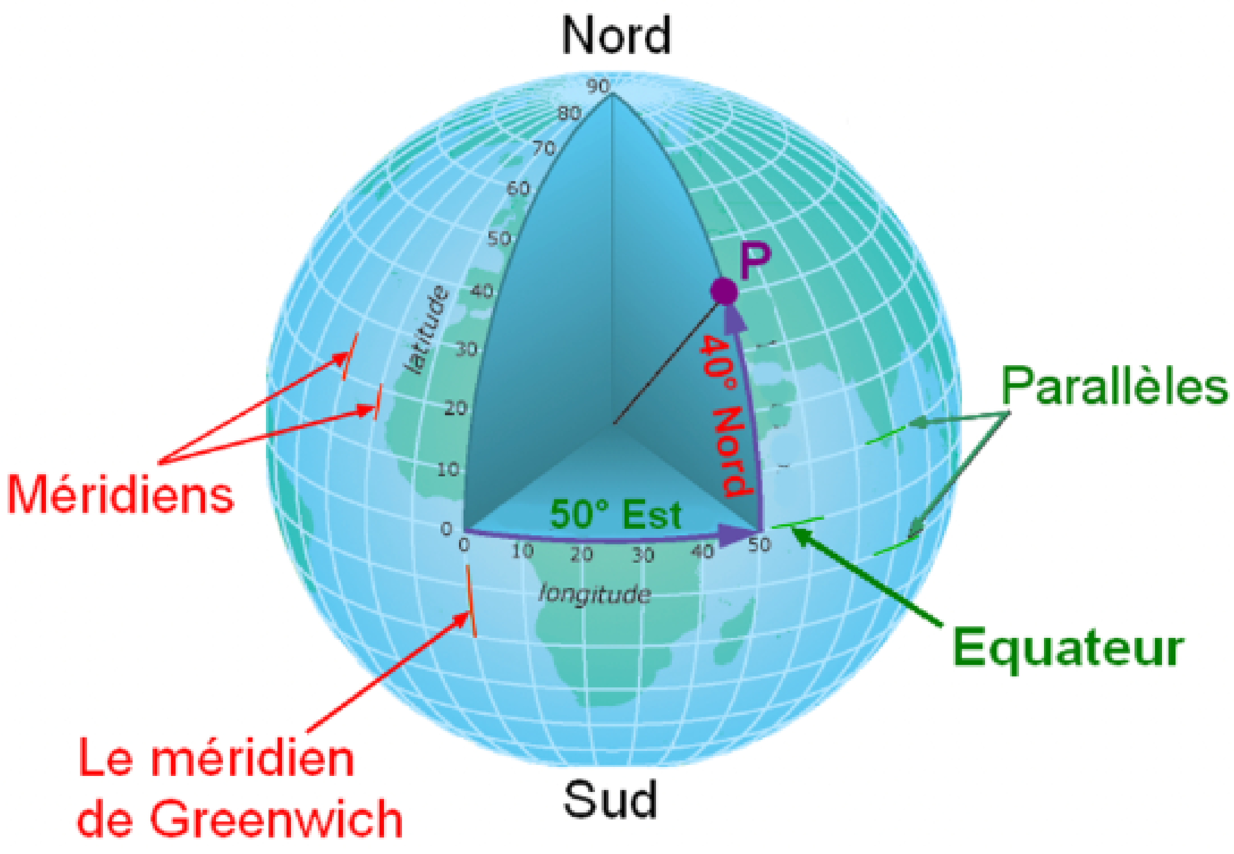
Définition — On peut repérer un point M sur une sphère par deux coordonnées :

- sa **latitude** comprise entre 0° et 90° Nord ou Sud ;
- sa **longitude**, comprise entre 0° et 180° Est ou Ouest.

Les **parallèles** sont des cercles dont les points ont la même **latitude**.
Le parallèle de référence est l'**Équateur**.

Les **méridiens** sont des demi-cercles passant par les pôles dont les points ont la même **longitude**.
Le méridien de référence est le **méridien de Greenwich**.

Exemple :



Avec l'image plus haut, le point P a pour coordonnées : (40°N;50°E)

La latitude du point P est 40° Nord.
La longitude du point P est 50° Est.

Fiche 43

Utiliser les formules d'un tableur

Temporary page !

LaTeX was unable to guess the total number of pages correctly. As there was some unprocessed data that should have been added to the final page this extra page has been added to receive it.

If you rerun the document (without altering it) this surplus page will go away, because LaTeX now knows how many pages to expect for this document.